Dérivation globale
Corrigé des exemples du cours

Capacité 3 ***Déterminer la fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables***

1. Les fonctions polynômes ci-dessous sont dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer leur fonction dérivée.

a. $f_1 : x \mapsto x^2 - 621x + 622$;

b. $f_2 : x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$;

c. $f_3 : x \mapsto x^3 + 4x^2 - 2x + 1$;

d. $f_4 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4(x-1)$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 4\sqrt{x} - \frac{5}{x} + x(x-1)$.

Justifier que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

3. Le coût de production, en centaines d'euros, de x centaines litres d'un produit chimique est modélise par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100$.

a. Justifier que la fonction C est dérivable sur $[0\,;25]$.

b. Déterminer sa fonction dérivée C'.

c. En déduire le coût marginal de production, en euros, de 1 000 litres de produit.

1) Pour tout réel x :

a) $f_1(x) = x^2 - 621x + 622$

dérivation (D) donc $f_1'(x) = 2x - 621$

b) $f_2(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

(D) donc $f_2'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

c) $f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$

(D) donc $f_3'(x) = 3x^2 + 8x - 2$

d) $f_4(x) = \frac{x^2}{2} - 4(x-1)$

$f_4(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$

(D) donc $f_4'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 4 = x - 4$

2) Pour tout réel $x > 0$:

$g(x) = 4\sqrt{x} - \frac{5}{x} + x(x-1)$

$g(x) = 4\sqrt{x} - 5 \times \frac{1}{x} + x^2 - x$

(D) donc $g'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) + 2x - 1$

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} + 2x - 1$$

3) a) C dérivable sur $[0;25]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0;25]$

b) Pour tout $x \in [0;25]$

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100$$

donc $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$

c) Pour 1000 litres = 10 centaines de litres le coût marginal de production est :

$C(x+1) - C(x)$ approché par $C'(x)$

$C'(10) = 100$

Capacité 4 ***Déterminer la fonction dérivée d'un produit***

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (6\sqrt{x}-1)(x^3+x)$.
On écrit $f(x) = u(x)\times v(x)$ avec $u : x \mapsto 6\sqrt{x}-1$ et $v : x \mapsto x^3+x$.

1. Justifier par règles opératoires, la dérivabilité de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. Donner les expressions de $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$ puis écrire l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.
3. Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a $f'(x) = 21x^2\sqrt{x}-3x^2+9\sqrt{x}-1$.
4. Représenter la courbe de f avec sa calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur la dérivabilité de f en 0 ? Démontrer cette conjecture avec la définition de la dérivabilité en un point.

1) f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

2) Pour tout réel $x>0$:

$u(x) = 6\sqrt{x}-1$ $\qquad$ $v(x) = x^3+x$

$u'(x) = 6\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \dfrac{6}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = 3x^2+1$

3) $f = u\times v$ avec u et v dérivables sur $]0;+\infty[$
D'après une propriété du cours, $f' = u'v + uv'$
Pour tout réel $x>0$, on a donc :

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}\times(x^3+x) + (6\sqrt{x}-1)\times(3x^2+1)$$

donc $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}x^3 + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\times x + 18\sqrt{x}\,x^2 + 6\sqrt{x} - 3x^2 - 1$

Rque : Pour $x>0$ on a :

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$$

et $\dfrac{x^3}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \dfrac{x^3\sqrt{x}}{x} = x^2\sqrt{x}$

On en déduit que : $f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 18x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} - 3x^2 - 1$
donc $f'(x) = 21x^2\sqrt{x} + 9\sqrt{x} - 3x^2 - 1$

Capacité 5 ***Déterminer la fonction dérivée d'un inverse***

f est la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-1}$. On écrit $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

1. Déterminer les racines x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, de la fonction polynôme du second degré u.

2. Justifier que $f = \dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]x_1\,;\,x_2[$.

3. Pour tout réel $x \in]x_1\,;\,x_2[$, donner les expressions de $u(x)$ et $u'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ et $u'(x)$.

1) Racines de x^2+x-1 :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4\times(-1) = 5$

$\Delta > 0$ donc 2 racines distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2) Sur $]x_1\,;x_2[$, u ne s'annule pas et elle est dérivable comme somme de fonctions dérivables x^2 et $x-1$.
On en déduit que $f = \dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]x_1;x_2[$ comme inverse d'une fonction

dérivable

3) Pour tout $x \in]x_1; x_2[$:

$u(x) = x^2 + x - 1$

$u'(x) = 2x + 1$

or $f = \frac{1}{u}$ donc $f' = \frac{-u'}{u^2}$

et donc $f'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = \frac{-2x-1}{(x^2+x-1)^2}$$

Capacité 6 ***Déterminer la fonction dérivée d'un quotient***

On considère la fonction $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x^{633}-622}{1-x} \end{array}$.

On considère également les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u : x \mapsto x^{633} - 622$ et $v : x \mapsto 1 - x$.

1. Justifier que $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$?
2. Soit x un réel différent de 1, déterminer une expression simplifiée de $f'(x)$ (développer et réduire le numérateur).

1) $f = \frac{u}{v}$ dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ comme quotient de 2 fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}-\{1\}$

2) Soit $x \neq 1$

$u(x) = x^{633} - 622$ $\qquad v(x) = 1 - x$

$u'(x) = 633x^{632}$ $\qquad v'(x) = -1$

$f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

on a donc :

$$f'(x) = \frac{633x^{632} \times (1-x) - (-1)\times(x^{633} - 622)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{633x^{632} - 633x^{632} \times x^1 + (x^{633} - 622)}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{633x^{632} - 633x^{633} + x^{633} - 622}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{633x^{632} - 632x^{633} - 622}{(1-x)^2}$$