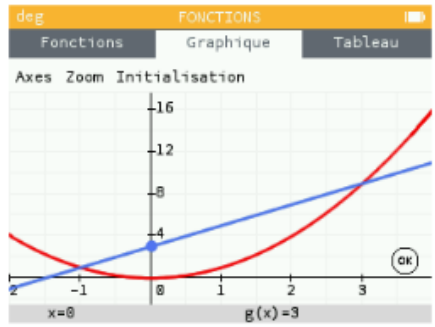
Corrigé du DM n°1

Exercice 1



Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$

Le graphique précédent, représente leurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-2; 4]$.

1. Par lecture graphique, compléter les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-2; 4]$:

- $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se croisent aux abscisses -1 et 3
- $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-1;3[$
- $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur la réunion d'intervalles $]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$.

2) Pour tout réel x, on a :

d'une part $f(x)-g(x) = 2x+3-x^2$

d'autre part $(x+1)(3-x) = 3x - x^2 + 3 - x = -x^2+2x+3$

On en déduit que : $f(x)-g(x) = (x+1)(3-x)$

3) On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4)

- Pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) - g(x) < 0 \iff f(x) < g(x)$$

et donc $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$

- Pour tout $x \in]-1 ; 3[$, on a :

$$f(x) - g(x) > 0 \iff f(x) > g(x)$$

et donc $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

- $f(x) - g(x) = 0 \iff f(x) = g(x)$

donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se croisent aux points d'abscisses -1 et 3.

Exercice 2

Intuitivement, on peut conjecturer que l'aire maximale d'un quadrilatère inscrit dans un cercle de rayon 1 est atteinte pour un carré de même centre que le cercle.

Si on nomme ABCD ce carré et O son centre, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

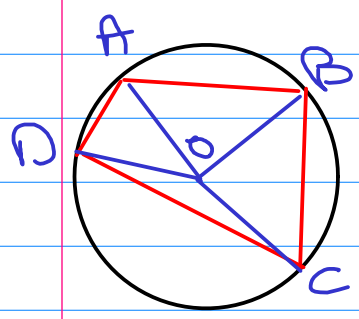
$$(1+1)^2 = 2\,AB^2 \qquad \text{car } AB = BC$$

$$\frac{4}{2} = 2 = AB^2$$

Or $AB \geq 0$ car c'est une longueur donc $AB = \sqrt{2}$

L'aire de ABCD est donc $\sqrt{2}^2 = 2$ qui est bien inférieure à $\pi \times 1^2 = \pi$ l'aire du disque.

Il reste cependant à prouver cependant qu'un quadrilatère d'aire maximale inscrit dans un cercle est nécessairement un carré.



On va d'abord démontrer que l'aire d'un polygone de centre O inscrit dans le cercle est toujours inférieure à celle du carré ABCD de centre O.

On découpe la surface de ABCD en 4 triangles : OAB, OBC, OCD et ODA et on démontre que l'aire de chacun de ces triangles est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$

Prenons par exemple le triangle OAB isocèle en O tel que $OA = OB = 1$.
Considérons la base $OB = 1$ et la hauteur AH avec H sur la droite (OB).
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHO rectangle en H il vient :

$$AO^2 = AH^2 + HO^2$$

On a donc $AH^2 \leq AO^2$

Or $AH \geq 0$ et $AO \geq 0$ donc $AH \leq AO$

donc $AH \leq 1$

Or l'aire de AOB est égale à :

$$\frac{1}{2} \times OB \times AH = \frac{1}{2} \times 1 \times AH$$

De $AH \leq 1$ on déduit que cette aire est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

Mutatis mutandis, on démontre que les aires des quatre triangles AOB, BOC, COD et AOD sont inférieures ou égales à $1/2$

Par additivité des aires, on a donc :

$$\text{Aire}(ABCD) \leq 4 \times \frac{1}{2}$$

Ainsi on a démontré que l'aire de tout quadrilatère inscrit dans un cercle de rayon 1 est inférieure ou égale à 2, l'aire du carré de même centre que le cercle dans lequel il est inscrit.

Ainsi le carré d'aire 2 est le quadrilatère d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon 1.

Exercice 3 Dans un repère du plan, soit les points $A(14;3)$ $B(4;1)$ $C(-5;2)$ et $D(8;-1)$

1) Soit E le milieu du segment [CD].

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} \quad \text{et} \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2}$$

$$x_E = \frac{-5+8}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_E = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

2) Coefficient directeur de la droite (AB) :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{4-14} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

Le coefficient directeur de (AB) est $m = \frac{1}{5}$

3) Démontrons que les points A, E, B sont alignés :

Le coefficient directeur de (AE) est :

$$m' = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{3}{2} - 14} = \frac{-5/2}{-25/2} = \frac{1}{5}$$

On remarque que les coefficients directeurs de (AE) et (AB) sont égaux, donc (AE) et (AB) sont parallèles.
Comme (AE) et (AB) ont un point commun, elles sont confondues et donc A, E, B alignés.

4) Soit Δ la médiane issue de D dans le triangle ACD.

- Soit F le milieu de [AC] :

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{et} \quad y_F = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_F = \frac{14-5}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad y_F = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

On a donc $F\left(\frac{9}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

- La médiane Δ issue de D passe par $D(8;-1)$ et F milieu de [AC].

Son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_D - y_F}{x_D - x_F} = \frac{-1 - 5/2}{8 - 9/2} = \frac{-7/2}{7/2} = -1$$

Une équation de la médiane Δ est de la forme : $y = mx + p$ avec $m = 1$

De plus Δ passe par $D(8;-1)$

On en déduit que $-1 = -1 \times 8 + p$

$8 - 1 = p$

$7 = p$

Une équation de la médiane issue de D est donc :

$$y = -x + 7$$

5) Le centre de gravité de ACD est le point d'intersection des médianes issues de D et de A, ses coordonnées sont donc solutions du système $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \begin{cases} y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} & \text{équation de la médiane issue de A} \\ y = -x + 7 & \text{équation de la médiane issue de D} \end{cases}$$

On résout le système $\mathcal{S}$ par substitution :

$\mathcal{S}$ équivaut à $\begin{cases} -x + 7 = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \\ y = -x + 7 \end{cases}$

$\mathcal{S}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{34}{5} = \frac{6}{5}x \\ y = -x + 7 \end{cases}$

$\mathcal{S}$ équivaut à $x = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$ et $y = -\frac{17}{3} + 7 = \frac{4}{3}$

Les coordonnées de G sont donc $G\left(\frac{17}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

Exercice 4

1) Chiffre d'affaires en février 2018 :

janvier 2018 $\xrightarrow{-18\%}$ février 2018

35 $\xrightarrow{\times\left(1-\frac{18}{100}\right)}$ $35 \times 0{,}82 = 28{,}7$ millions

2. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le chiffre d'affaires n mois après janvier 2018.

```python
def chiffre(n):
    c = 35
    for k in range(n):
        c = c * 0.82
    return c
```

3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne au bout de combien de mois après janvier 2018, le chiffre d'affaires deviendra pour la première fois inférieur à 5 millions d'euros.

```
def seuil():
    c = 35
    n = 0
    while c >= 5 :
        c = c * 0.82
        n = n+1
    return n
```

4. Quelle formule peut-on saisir puis propager vers le bas, dans la cellule B3 de la feuille de tableur ci-dessous, pour déterminer la valeur retournée par l'appel de fonction seuil() ?

	A	B
1	Mois	Nombre d'étudiants en septembre
2	1	35
3	2	= B2 * 0,82