Histoire 1

- Al-Kashi est un mathématicien persan du XV^e siècle. Il a calculé la meilleur approximation de π jamais trouvée à son époque avec 16 décimales. On lui doit une généralisation du théorème de *Pythagore* dans un triangle quelconque, très utile, avec une autre loi, dite des sinus, pour calculer longueurs et angles dans des triangles (applications en astronomie, géodésie ...).

- William Hamilton, mathématicien et astronome irlandais du XIX^e siècle, titulaire de la chaire d'astronomie de Académie royale à 22 ans, utilise pour la première fois le terme de vecteur et développe le concept d'espace vectoriel. Après avoir formalisé l'étude des nombres complexes dans un espace à deux dimensions (programme de mathématiques expertes), il construit un ensemble similaire dans un espace à quatre dimensions, le corps des quaternions.

1 Produit scalaire

La définition et les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs, sont valables dans le plan ou l'espace. Les expressions avec les coordonnées sont différentes dans le plan et l'espace.

1.1 Norme d'un vecteur et théorème de Pythagore

Définition 1

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

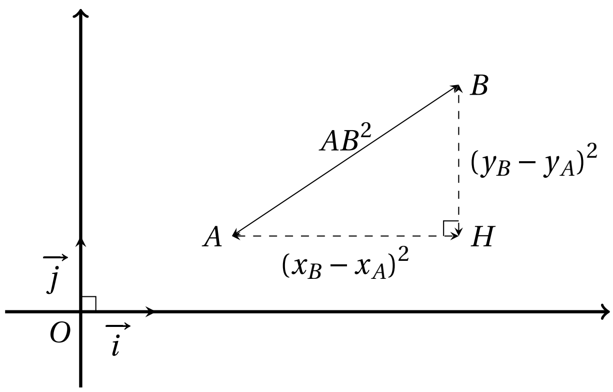
La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\boxed{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}$ est la longueur AB.

Théorème 1 ***Théorème de Pythagore***

Le plan est muni d'un repère *orthonormé* $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Soit $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ un vecteur du plan et deux points $A\left(x_A\,;y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;y_B\right)$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Les égalités suivantes sont équivalentes :

- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
- $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 = x^2 + y^2$



Algorithmique 1

1. Dans un repère orthonormé du plan, soit le point $C\,(3\,;\,-2)$ et le cercle Γ de centre C et de rayon 5. Le point $A\,(4\,;\,2)$ est-il à l'intérieur du disque Γ ?

2. Écrire en `Python` une fonction `dansDisque(x, y, xC, yC, R)` qui retourne un booléen indiquant si le point de coordonnées `(x,y)` est à l'intérieur du disque de rayon `R` dont le centre a pour coordonnées `(xC, yC)`.

3. Corrigé sur `https://workshop.numworks.com/python/frederic-junier/prodscal1`.

1.2 Définition du produit scalaire

Définition 2

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est le **réel** défini par :

- $\boxed{\text{Premier cas}}$ Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

- $\boxed{\text{Second cas}}$ Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$.

Capacité 1 *Calculer un produit scalaire avec la formule du cosinus (voir exo 1 p. 211)*

Soit ABC un triangle tel que $AC = 5$, $AB = 6$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$ radians.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Propriété 1 *Symétrie du produit scalaire*

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}$.

Démonstration

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors par définition $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, soit trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
  Par définition, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = AC \times AB \times \cos\left(\widehat{CAB}\right)$.

Or $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ ont même mesure et $AB \times AC = AC \times AB$, donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

Propriété 2 ***Carré scalaire***

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$.

Démonstration

- $\boxed{\text{Premier cas}}$ Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur nul alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ et $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 0$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$.
- $\boxed{\text{Second cas}}$ Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, soit deux points A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
  Par définition, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = AB \times AB \times \cos\left(\widehat{BAB}\right)$.
  Or $\widehat{BAB}$ est un angle de mesure nulle donc de cosinus égal à 1.
  Ainsi $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = AB^2$. Or $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$. On a donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$.

Propriété 3 ***Produit scalaire de vecteurs colinéaires***

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires.

- **Premier cas :** Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\|$.
- **Deuxième cas :** Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens opposés alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\|$.

Démonstration

On peut représenter $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ à partir d'un même point origine A.
Soit B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

- $\boxed{\text{Premier cas}}$ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens alors $\widehat{BAC} = 0$ donc :
  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(0) = AB \times AC$.
- $\boxed{\text{Second cas}}$ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens opposés alors $\widehat{BAC} = \pi$ donc :
  $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\pi) = -AB \times AC$.

1.3 Orthogonalité et produit scalaire

Définition 3

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de représentants $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **orthogonaux** si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Cette définition ne dépend pas du choix des représentants de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de même origine.

Propriété 4 ***Caractérisation de l'orthogonalité***

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.}$$

Démonstration

Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, soit trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Par définition, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
Puisque $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, on a $AB = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \neq 0$ et $AC = \left\|\overrightarrow{v}\right\| \neq 0$ et donc on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 &\Longleftrightarrow \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0 \\
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 &\Longleftrightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif} \\
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 &\Longleftrightarrow (AB) \text{ et } (AC) \text{ perpendiculaires}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Propriété 5 ***Projection orthogonale***

Pour tous points A, B et C, si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de sens opposés} \end{cases}$$

Démonstration

On raisonne par disjonction des cas selon la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$.

- $\boxed{\text{Premier cas, l'angle est aigu : } 0 \leqslant \widehat{BAC} \leqslant \frac{\pi}{2}}$

  Par définition, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

  Or dans le triangle AHC rectangle en H, on a $AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AH$.

  On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\left(\widehat{BAH}\right) = AB \times AH$ car $\widehat{BAH}$ de mesure nulle.

  On a donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

- $\boxed{\text{Second cas, l'angle est obtu : } \frac{\pi}{2} \leqslant \widehat{BAC} \leqslant \pi}$

  Par définition, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

  Dans le triangle AHC rectangle en H, on a $AC \times \cos\left(\widehat{CAH}\right) = AH$. Or $\widehat{CAH}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles supplémentaires donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\cos\left(\widehat{CAH}\right)$.

  Ainsi, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

  De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\left(\widehat{BAH}\right) = -AB \times AH$ car $\widehat{BAH}$ est un angle plat de mesure π radians donc de cosinus égal à -1.

  On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Capacité 2 *Calculer un produit scalaire avec la projection orthogonale (voir exo 2 p. 211)*

ABC est un triangle rectangle en B avec $AB = 4$ et $BC = 3$ et H est le projeté orthogonal de B sur $[AC]$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$.
2. En exprimant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'une autre façon, calculer la longueur AH.

2 Propriétés du produit scalaire

2.1 Expression du produit scalaire avec les normes de vecteur

Propriété 6

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)}$$

Démonstration

- $\boxed{\text{Premier cas}}$ Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

  D'autre part $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{0}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{0}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{0}\right\|^2 = 0$.

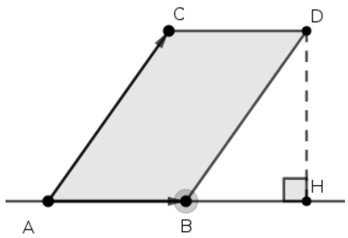
  On a donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)$.

- $\boxed{\text{Second cas}}$ Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, soit trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note D le point tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ et on appelle H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).

  De $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ on déduit que $ABDC$ est un parallélogramme et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

  On distingue trois sous-cas selon la position de H par rapport au segment $[AB]$:

  – $\boxed{\text{Premier sous-cas :}}$ H appartient à la demi-droite $[AB)$ et se trouve à à l'extérieur du segment $[AB]$.

  D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADH rectangle en H on a $AD^2 = AH^2 + HD^2$.
  D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BHD rectangle en H on a $HD^2 = BD^2 - BH^2$.
  On en déduit que :

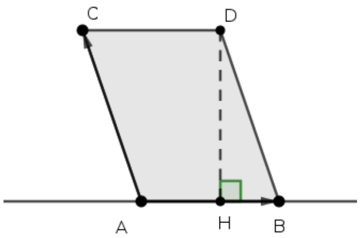
$$AD^2 = AH^2 + BD^2 - BH^2 = (AB+BH)^2 + BD^2 - BH^2$$
$$AD^2 = AB^2 + BH^2 + 2 \times AB \times BH + BD^2 - BH^2$$
$$\frac{1}{2}\left(AD^2 - BD^2 - AB^2\right) = AB \times BH$$

Or on a $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=AD^2$ et $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2=AB^2$ et $\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2=AC^2=BD^2$.

De plus $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ donc $AB\cdot AC=AB\cdot BD=AB\times BH$ par propriété de la projection orthogonale. Ainsi $AB\times BH=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

Finalement, on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)$

– $\boxed{\text{Deuxième sous-cas :}}$ H appartient au segment $[AB]$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADH rectangle en H on a $AD^2=AH^2+HD^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BHD rectangle en H on a $HD^2=BD^2-BH^2$.
On en déduit que :

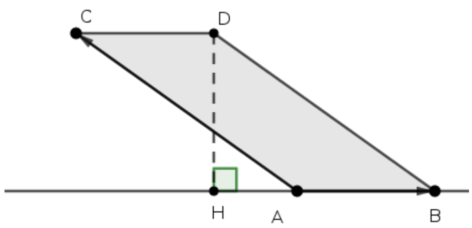
$$AD^2=AH^2+BD^2-BH^2=(AB-BH)^2+BD^2-BH^2$$
$$AD^2=AB^2+BH^2-2\times AB\times BH+BD^2-BH^2$$
$$\frac{1}{2}\left(AD^2-BD^2-AB^2\right)=-AB\times BH$$

Or on a $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=AD^2$ et $\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2=AB^2$ et $\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2=AC^2=BD^2$.

De plus $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH}$ par propriété de la projection orthogonale. Si H appartient au segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}$ colinéaires de sens opposés donc $AB\cdot BH=-AB\times BH$.

Finalement, on retrouve que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)$

– $\boxed{\text{Troisième sous-cas :}}$ H appartient à la demi-droite $[BA)$ et se trouve à à l'extérieur du segment $[AB]$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADH rectangle en H on a $AD^2=AH^2+HD^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BHD rectangle en H on a $HD^2=BD^2-BH^2$.

On en déduit que :

$$AD^2 = AH^2 + BD^2 - BH^2 = AH^2 + BD^2 - (BA + AH)^2$$
$$AD^2 = BD^2 - BA^2 - 2 \times BA \times (BH - BA)$$
$$AD^2 = BD^2 + BA^2 - 2 \times BA \times BH$$
$$\frac{1}{2}\left(AD^2 - BD^2 - AB^2\right) = -AB \times BH$$

Or on a $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = AD^2$ et $\left\|\vec{u}\right\|^2 = AB^2$ et $\left\|\vec{v}\right\|^2 = AC^2 = BD^2$.

De plus $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH}$ par propriété de la projection orthogonale. Si H appartient à la demi-droite $[BA)$ et se trouve à l'extérieur du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}$ colinéaires de sens opposés donc $AB \cdot BH = -AB \times BH$.

Finalement, on retrouve que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Capacité 3 ***Utiliser la formule du produit scalaire avec les carrés scalaires***

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec la définition (formule du cosinus).
2. Faire une figure et construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec la formule des carrés scalaires. Quel théorème applique-t-on finalement pour retrouver le résultat de la question 1. ?

2.2 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Propriété 7

Dans le plan muni d'une base orthonormée, pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration

On applique l'expression du produit scalaire avec les normes de vecteur.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$

Or on a $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;\,y')$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\,(x+x'\,;\,y+y')$. On applique alors le théorème 1 (Pythagore) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right)\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-((x')^2+(y')^2)\right)\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= xx'+yy'
\end{aligned}$$

Corollaire

Dans le plan muni d'une base orthonormée, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux} \iff xx'+yy'=0$$

Capacité 4 *Démontrer une orthogonalité avec un produit scalaire (voir exo 1 p. 213s)*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, soit les points $E\,(-4\,;\,3)$, $F\,(2\,;\,1)$, $G\,(3\,;\,-4)$, $H\,(6\,;\,7)$.

1. Les droites (EF) et (GH) sont-elles orthogonales ?
2. Soient un paramètre réel m et le point $M\,(4\,;\,m)$.
   - **a.** Montrer que $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{GM}=m^2+3m-2$.
   - **b.** Existe-t-il des positions de M pour lesquelles le triangle FMG est rectangle en M ?
     Si oui, déterminer les coordonnées des points M correspondant.

Capacité 5 *Calculer un angle avec le produit scalaire (voir exo 2 p. 213)*

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(0\,;\,4)$, $B\,(6\,;\,3)$ et $C\,(-4\,;\,-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes pour déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

Algorithmique 2

1. Écrire en `Python` une fonction `prodscal(x1, y1, x2, y2)` qui retourne le produit scalaire des vecteurs de coordonnées `(x1, y1)` et `(x2, y2)`.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé on considère les points $O\,(0\,;\,0)$ et $A\,(100\,;\,0)$. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour que la liste `L` contienne en sortie de boucle les coordonnées `(x, y)` de tous les points B distincts de O et A tels que OBA rectangle en B avec `x` et `y` entiers

compris entre 0 et 100.

```
L = []
for x in range(0, .......):
    for y in range(0, ......):
        if (x,y) != (0,0) and ..................................:
            L.append((x,y))
```

3. Corrigé sur https://workshop.numworks.com/python/frederic-junier/prodscal2.

2.3 Propriété de bilinéarité et identités remarquables

Propriété 8

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et tout réel λ :

1. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
2. $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$
3. $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Démonstration

....

....

....

....

....

....

....

....

Corollaire *Identités remarquables*

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et tout réel λ :

1. $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$

2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$

3. $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

Démonstration

....

....

....

....

Capacité 6 *Utiliser la propriété de bilinéarité*

1. **a.** Soit A, B et C trois points du plan.
   Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
   b. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme.
   a. A l'aide du produit scalaire, démontrer que $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$.
   b. Si $ABCD$ est un rectangle, quel théorème connu depuis l'Antiquité peut-on retrouver?

Capacité 7 *Choisir une forme adaptée pour calculer un produit scalaire*

Soit ABC un triangle rectangle en A, I et J les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ et H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. On veut démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont orthogonales.

1. Justifier que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$
2. En déduire que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}=-AH^2$
3. On admet que $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}\right)$ et $\overrightarrow{HJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}\right)$.
   Déduire des questions précédentes que $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ}=0$ et conclure.