Exercice 1

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. Vérifier que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €.

2. Avec le mode suite de la calculatrice, calculer u_9 au centime près. Interpréter le résultat.

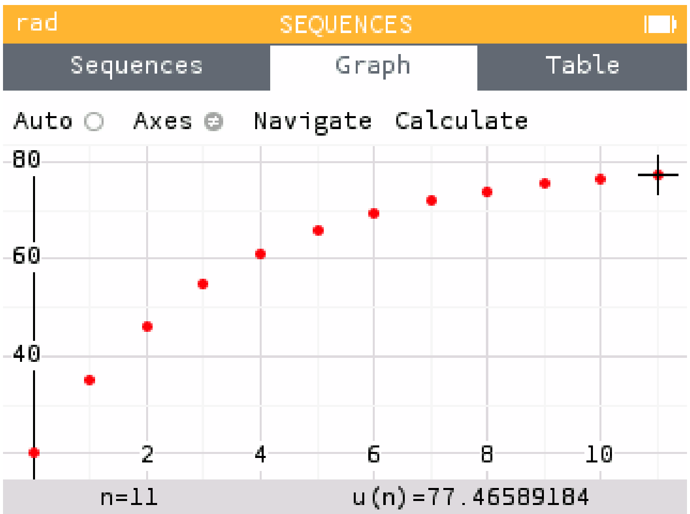
3. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.

   Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre de mois que Maya doit attendre avant d'avoir plus de 70 euros dans sa tirelire.

```
def seuil():
    u = 20
    n = 0
    while ............... :
        u = ................
        n = ................
    return n
```

4. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.
   b. Préciser son premier terme v_0.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$.
   d. On a représenté ci-dessous un nuage de points des premiers termes de la suite (u_n).
   Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Justifier.
   e. Conjecturer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + \mathrm{e}^{u_n}}$$

1. **a.** Calculer u_1.

b. Compléter la fonction Python `liste_termes(k)` ci-dessous qui prend en paramètre un entier naturel `k` et renvoie la liste des premiers termes de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
from math import exp


def liste_termes(k):
    u = 1
    L = [u]
    for i in range(k):
        u = ..........
        L.append(u)
    return ...........
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $1 < u_n + \mathrm{e}^{u_n}$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

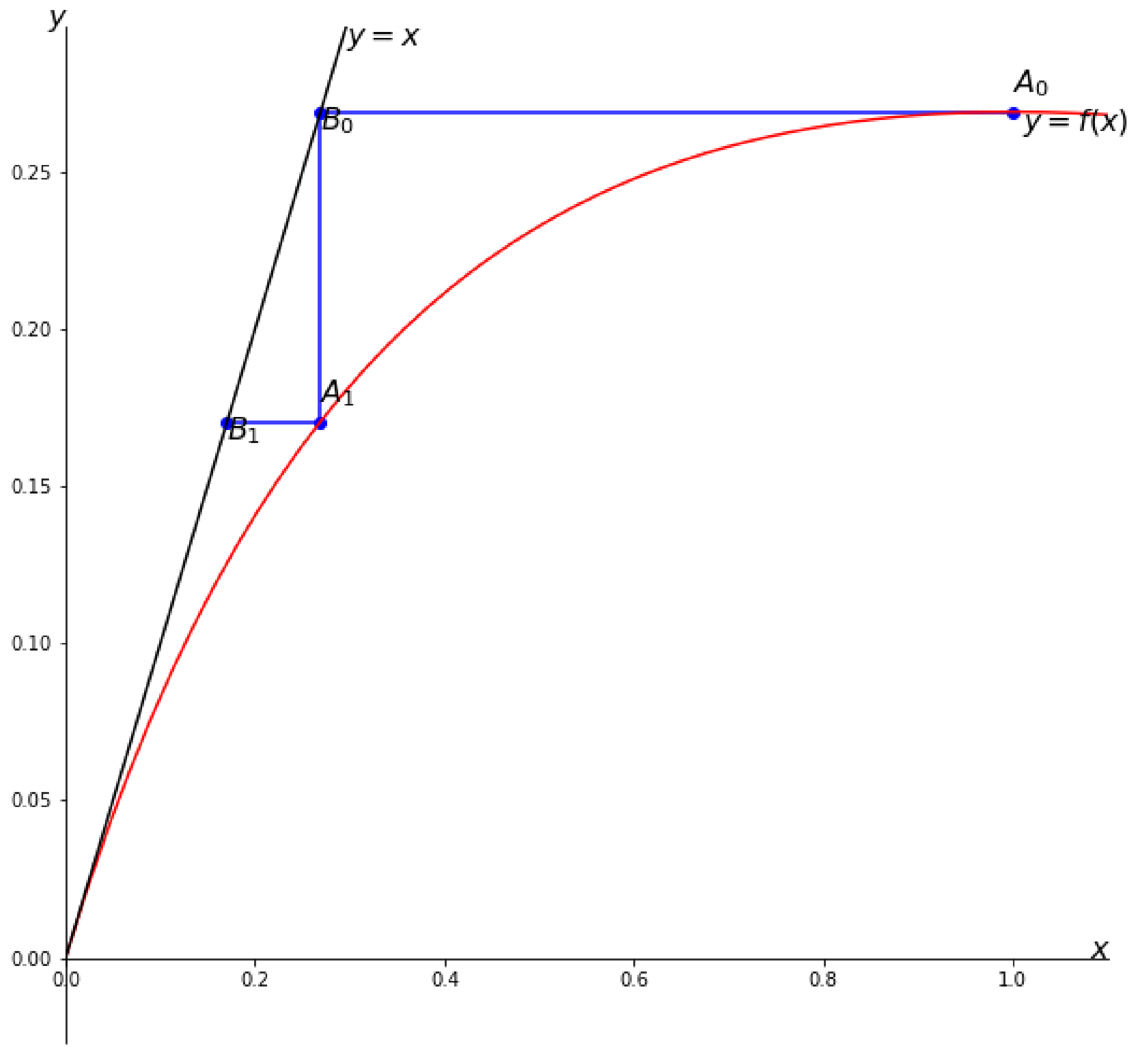
3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x + \mathrm{e}^x}$.

On peut reformuler ainsi la définition de la suite (u_n) :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté :

- la droite d'équation $y = x$;
- la courbe d'équation $y = f(x)$.
- les points :
  - A_0 de coordonnées $(u_0\,; u_1)$ et B_0 de coordonnées $(u_1\,; u_1)$;
  - A_1 de coordonnées $(u_1\,; u_2)$ et B_1 de coordonnées $(u_2\,; u_2)$.



a. À partir des points déjà représentés, construire les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

b. Compléter le graphique pour construire avec la même méthode les termes u_3, u_4 et u_5 sur l'axe des abscisses.

c. Peut-on conjecturer que la suite (u_n) converge ? Justifier.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,10]$ par :

$$f(x) = (10x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,10]$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel $x \in [-1\,;\,10]$, on a $f'(x) = (9-10x)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[-1\,;\,10]$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,10]$.

d. Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un maximum ?
Quelle est la valeur de ce maximum ? (on arrondira à l'unité).