Exercice 1

Une usine peut produire en un mois entre 0 et 50 machines agricoles.

On a modélisé le bénéfice de l'entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 50]$ par $f(x) = x^3 - 96x^2 + 2\,484x - 10\,000$.

1. Représenter avec sa calculatrice la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0; 50]$.

Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, le nombre de machines agricoles que doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.

2. Justifier que f est dérivable sur $[0; 50]$. On désigne par f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

3. Résoudre l'équation : $3x^2 - 192x + 2\,484 = 0$.

4. Recopier et compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	0	...	...	50
Signe de $f'(x)$		0	0	
Variations de f				

5. À l'aide des questions précédentes, donner le nombre de machines à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal, puis calculer ce bénéfice maximal.

Exercice 2

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.

Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

On appelle coût moyen la fonction C_M définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ telle que :

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,10]$, $C'_M(x)$ peut s'écrire :

$$C'_M(x) = \frac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}.$$

2. En déduire le tableau des variations de la fonction C_M.

3. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal et la valeur du coût moyen minimal par kilogramme, au centime d'euro près.

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 centaines d'euros la tonne.

4. On note B la fonction bénéfice, exprimée en centaines d'euros. Montrer que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ est :

$$B(x) = -0,5x^3 + 4x^2 + 20x - 72.$$

5. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ?

Justifier la réponse.