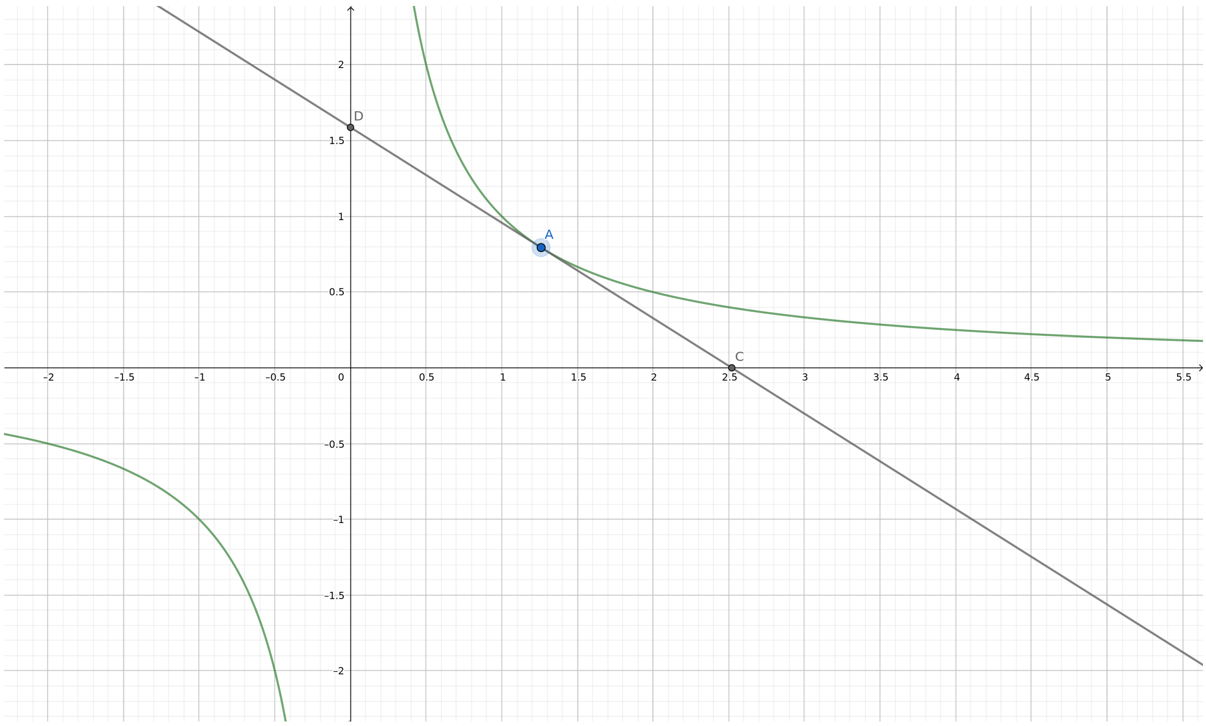
Exercice 1 *Tangente à une hyperbole*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormal du plan. On considère un point A de $\mathscr{C}_f$ et on note C et D les points d'intersection de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A, respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



1. Ouvrir le fichier Geogebra https://www.geogebra.org/geometry/xjkvdwcf, déplacer le point A sur $\mathscr{C}_f$ et conjecturer la position de A par rapport aux points C et D.

2. On note a l'abscisse du point A, avec $a\neq 0$.

a. Démontrer qu'une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A est $y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$.

b. En déduire les coordonnées des points C et D en fonction de a.

c. Démontrer la conjecture établie en question **1.**

Exercice 2 *Tangente et asymptote*

Soit a, b et c des constantes réelles. On suppose de plus que $a\neq 0$.
On considère la fonction :

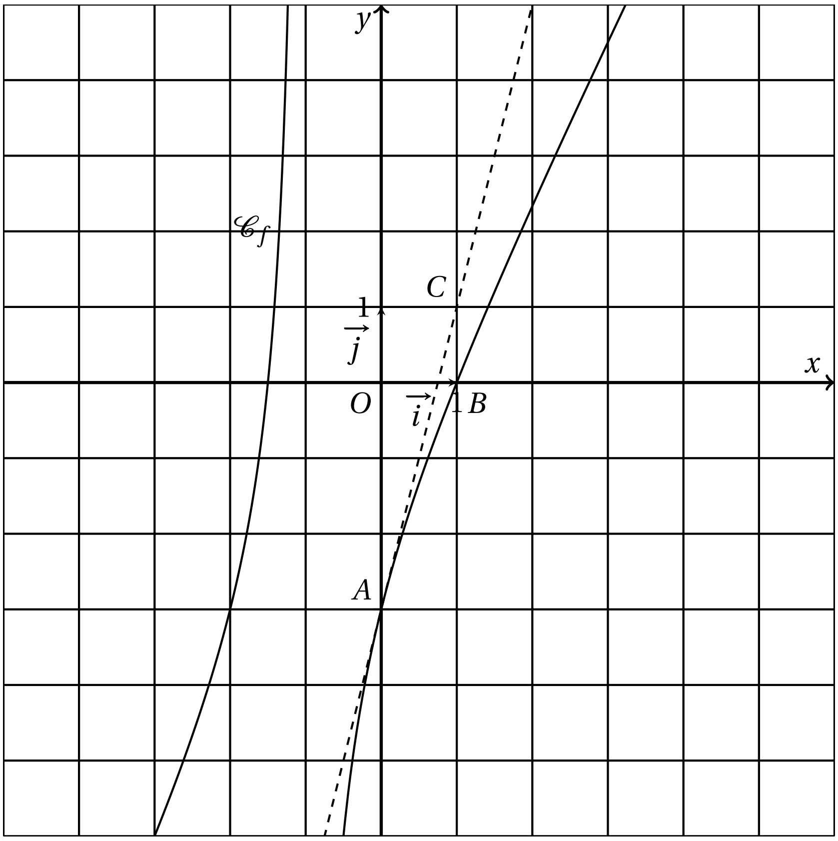
$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}-\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{ax^2+bx+c}{x+1} \end{array}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.
Sur le même graphique, on a placé les points $A(0\,;-3)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$.

☞ $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B

☞ la droite (AC) est tangente à $\mathscr{C}_f$ en A



1. Justifier par le calcul qu'une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est $y = 4x - 3$.

2. Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$ on a :

$$f'(x) = \frac{ax^2 + 2ax + b - c}{(x+1)^2}$$

3. Justifier que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} c = -3 \\ b - c = 4 \\ \dfrac{a+b+c}{2} = 0 \end{cases}$$

4. Résoudre le système précédent pour déterminer a, b et c.

On admet que pour tout réel $x \neq -1$ on a :

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x+1}$$

5. Étudier les positions relatives sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ de $\mathscr{C}_f$ et de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

6. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
La droite Δ peut-elle être tangente à $\mathscr{C}_f$?