Exercice 1 *Bicarrée*

1. On considère la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = x^2 - 51x + 50$.

a. Donner une racine évidente de T, en déduire toutes les racines de T et sa forme factorisée.

$T(1) = 1^2 - 51 \times 1 + 50 = 0$ donc 1 est racine de T.

Soit x_2 l'autre racine de T, d'après la propriété des racines, on a :

$$1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{50}{1} \Leftrightarrow x_2 = 50$$

b. Résoudre l'inéquation $T(x) < 0$.

Le coefficient dominant du trinôme T est $a = 1$ et ses racines sont 50 et 1 donc pour tout réel x, T se factorise en $T(x) = (x-1)(x-50)$.

On applique la règle du signe d'un trinôme :

x	$-\infty$		1		50		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $T(x) < 0$ est $]1\,;50[$.

2. Pour combien de nombres entiers relatifs x, le nombre $x^4 - 51x^2 + 50$ est-il négatif?

Commençons par résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 - 51x^2 + 50 < 0$ puis on comptera les entiers relatifs dans l'ensemble des solutions.

Soit x un réel.

On remarque d'abord que $x^4 - 51x^2 + 50 = T(x^2)$.

Ensuite, on utilise la forme factorisée de T et on en déduit que $T(x^2) = (x^2-1)(x^2-50)$.

On peut poursuivre la factorisation : $T(x^2) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{50})(x+\sqrt{50})$.

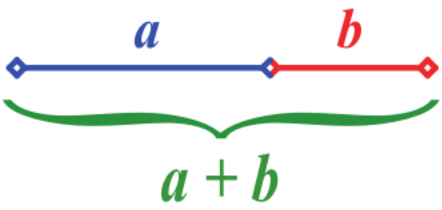
On peut dresser un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{50}$		-1		1		$\sqrt{50}$		$+\infty$
x^2-1		+		+	0	-	0	+		+	
x^2-50		+	0	-		-		-	0	+	
$x^4 - 51x^2+50$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

On en déduit que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $T(x) < 0$ est la réunion d'intervalles $\left]-\sqrt{50}\,;-1\right[\cup \left]1\,;\sqrt{50}\right[$.

De $7 \leqslant \sqrt{50} < 8$ on déduit que les intervalles $\left]-\sqrt{50}\,;-1\right[$ et $\left]1\,;\sqrt{50}\right[$ contiennent chacun 6 entiers relatifs et donc que $x^4 - 51x^2 + 50 < 0$ pour $2 \times 6 = 12$ entiers relatifs.

Exercice 2 *Nombre d'or*



Le nombre d'or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport entre deux longueurs a et b telles que le quotient de la somme des deux longueurs $a+b$ par la plus grande a soit égal à celui de la plus grande a par la plus petite b,

c'est-à-dire l'unique rapport entre deux longueurs a et b tel que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Le découpage d'un segment en deux longueurs vérifiant cette propriété est appelée par Euclide découpage en « extrême et moyenne raison ». Le nombre d'or est maintenant souvent désigné par la lettre Φ (phi) en l'honneur du sculpteur Phidias qui l'aurait utilisé pour concevoir le Parthénon.

Soit a et b deux nombres tels que $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$.

1. On pose $\Phi = \dfrac{a}{b}$.

a. Démontrer que Φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Par définition, si on se donne deux réels a et b strictement positifs, $\Phi = \dfrac{a}{b}$ vérifie :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$

Or $\Phi > 0$ car c'est un rapport de longueurs

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff \Phi + \frac{\Phi}{\Phi} = \Phi^2$$
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff \Phi + 1 = \Phi^2$$
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Φ est donc la solution strictement positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b. Justifier que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donner une valeur approchée de Φ à 10^{-5} près.

On résout l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-1) = 5$. On a $\Delta > 0$ donc l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Puisque $\Phi > 0$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on en déduit que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$.

2. **a.** Démontrer que $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$.

Déjà démontré dans la question **1 .a**

b. En déduire que

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} \quad \text{et} \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}$$

On applique récursivement la relation $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

On susbtitue $1 + \dfrac{1}{\Phi}$ à Φ dans le membre de droite

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}$$

On susbtitue de nouveau $1 + \dfrac{1}{\Phi}$ à Φ dans le membre de droite

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}$$

On définit une suite logique de fractions $f(n)$ pour tout entier naturel n par :

$$f(0) = 1\,;\, f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2\,;\, f(2) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,;\, f(3) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}\ldots$$

3. Vérifier que $f(4) = \dfrac{8}{5}$ et $f(5) = \dfrac{13}{8}$.

On remarque que pour tout entier naturel n, on a : $f(n+1) = 1 + \dfrac{1}{f_n}$

De $f(3) = \dfrac{5}{3}$ on déduit que $f(4) = 1 + \dfrac{1}{f(3)} = 1 + \dfrac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

Puis on déduit que $f(5) = 1 + \dfrac{1}{f(4)} = 1 + \dfrac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{13}{8}$

4. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `f(n)` renvoie la n^{e} fraction de la suite.

```python
def f(n):
    f = 1
    for k in range(1, n + 1):
        f = 1 + 1/f
    return f
```

5. Tester cette fonction dans l'interpréteur en ligne https://frederic-junier.org/basthon/ et donner une valeur approchée de $f(20)$ à 10^{-9} près.

```
Python 3.8.2 (default, Dec 25 2020 21:20:57)
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> def f(n):
...     f = 1
...     for k in range(1, n + 1):
...         f = 1 + 1/f
...     return f
>>> f(10)
1.6179775280898876
```

6. On veut désormais écrire une fraction qui renvoie une représentation fractionnaire exacte de $f(n)$ pour tout entier naturel n.

a. Supposons que pour un entier naturel n, $f(n)$ a pour écriture fractionnaire $f(n) = \frac{b}{a}$.
Déterminer une écriture fractionnaire de $f(n+1)$.
Sir $f(n) = \frac{b}{a}$ alors $f(n+1) = 1 + \frac{1}{f(n)} = 1 + \frac{1}{\frac{b}{a}} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$.

b. En déduire une fonction Python `f_fraction(n)` qui renvoie une écriture fractionnaire de $f(n)$ pour un entier naturel n :

```
def f_fraction(n):
    a = 1 #dénominateur
    b = 1 #numérateur
    for k in range(1, n + 1):
        tmp = b  #variable de stockage
        b = a + b
        a = tmp
    return (b, a)


assert f_fraction(3) == (5, 3) #test 1
assert f_fraction(4) == (8, 5) #test 2
```