Corrigé de la fiche d'exercices n°2

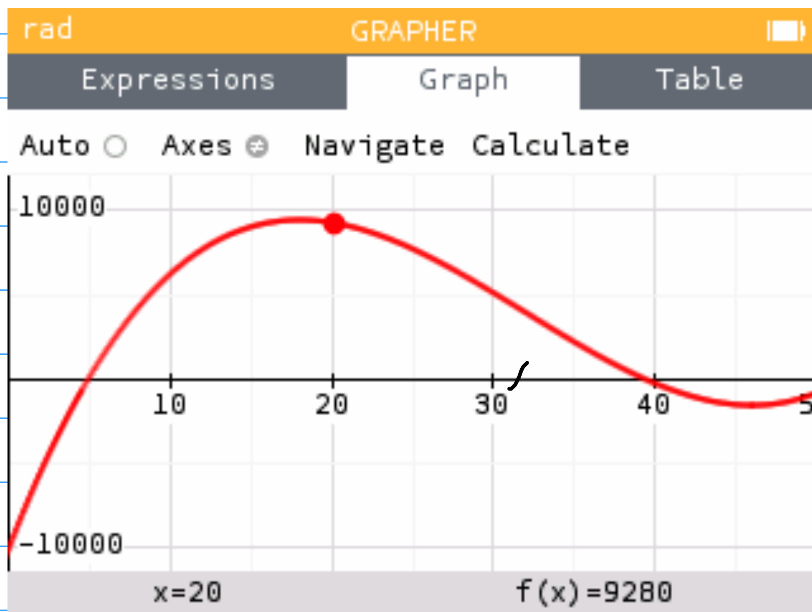
Exercice 1

Une usine peut produire en un mois entre 0 et 50 machines agricoles.

On a modélisé le bénéfice de l'entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;50]$ par $f(x) = x^3 - 96x^2 + 2\,484x - 10\,000$.

1. Représenter avec sa calculatrice la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;50]$.

   Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, le nombre de machines agricoles que doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.



Graphiquement, $f(x) > 0$ approximativement pour $x \in]5\,;40[$

2) f dérivable sur $[5\,;40]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[5\,;40]$

3) Pour tout réel $x \in [5\,;40]$, on a :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2484x - 10000$$

donc $f'(x) = 3x^2 - 192x + 2484$

3) Déterminons les racines de $f'(x)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-192)^2 - 4 \times 3 \times 2484$$

$$\Delta = 7056 \qquad \sqrt{\Delta} = 84$$

$\Delta > 0$ donc deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{192-84}{2\times3} = \frac{108}{6} = 18$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{192+84}{2\times3} = \frac{276}{6} = \frac{138}{3} = 46$$

4. Recopier et compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	0		18		46		50
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗	$f(18)$	↘		↗	$f(50)$

5) On a deux maximums locaux :

$f(18)$ et $f(50)$

$f(18) = 9440$. et $f(50) = -800$

Le maximum global est donc :

$$f(18) = 9440$$

Il faut donc fabriquer 18 machines pour atteindre un bénéfice maximal de :

9440 milliers d'euros environ.

Exercice 2

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.

Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en centaines d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

On appelle coût moyen la fonction C_M définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; 10]$ telle que :

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1) On applique la formule de dérivation d'un quotient :

Pour tout $x \in]0 ; 10]$:

$$C'_M(x) = \frac{f'(x) \times x - 1 \times f(x)}{x^2}$$

$$C'_M(x) = \frac{(1,5x^2 - 8x + 20)x - (0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72)}{x^2}$$

$$C'_M(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$$

D'autre part :

$$\frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2} = \frac{x^3 + 2x^2 + 12x - 6x^2 - 12x - 72}{x^2}$$

$$\frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0;10]$,

$$C'_M(x) = \frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}$$

2) Pour tout $x \in]0;10]$, on a :

$$x^2+2x+12 > 0 \quad \text{et} \quad x^2 > 0$$

donc $C'_M(x)$ du signe de $x-6$

3)

x	0		6		10
$C'_M(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	‖	↘	$C_M(6) = 26$	↗	

4) Le coût moyen est donc minimal pour une production de 6 tonnes et il est alors de :

$C_M(6) = 26$ centaines d'euros la tonne.

4) Bénéfice = Recette − Coût

Recette = Quantité produite × Prix unitaire

donc pour une production de $x \in]0;10]$ tonnes le bénéfice est de :

$B(x) = R(x) - f(x)$

$B(x) = 40x - (0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72)$

$B(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 20x - 72$

5) Étudions les variations de la fonction B dérivable sur $[0;10]$.

Pour tout $x \in [0;10]$, on a :

$B'(x) = -1{,}5x^2 + 8x + 20$

On détermine les racines de ce trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-1{,}5) \times 20 = 184$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46} \approx 13{,}6$

On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 2\sqrt{46}}{-3} = \frac{8 + 2\sqrt{46}}{3} \approx 7{,}19$$

et $x_2 = \dfrac{8 - 2\sqrt{46}}{3} \approx -1{,}85$

5) x_2

x	0		x_1		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$ signe de a	
$B(x)$	$B(0)=-72$	$\nearrow$	$B(x_1)$	$\searrow$	28

$B(x_1) \simeq 92{,}737$ centaines d'euros

le bénéfice maximal est atteint pour une production de

$$\frac{8+2\sqrt{46}}{3} \simeq 7{,}188 \text{ tonnes}$$

qui ne correspond pas à la production de 6 tonnes permettant d'obtenir un coût moyen minimal.