Histoire 1

Hipparque (vers 150 avant JC) peut être considéré comme le fondateur de la trigonométrie, fondamentale en Astronomie et dans tous les domaines de la Physique (mécanique, traitement du signal ...). Le terme trigonométrie tient son nom du grec *trigônos = triangle* et *métron = mesure*.
On lui doit les premières tables trigonométriques et le premier catalogue d'étoiles : il en recensa 1025.
Dans ses calculs Hipparque utilisa le système sexagésimal, c'est-à-direla base 60 héritée des Babyloniens pour la mesure du temps. Repris par par Ptolémée et les mathématiciens arabes, l'usage de la division de la circonférence d'un cercle en 360 degrés d'arcs nous est resté.
En 1696, Jean Bernoulli posa le problème du *brachistochrone*, courbe représentant la trajectoire la plus rapide entre deux points A et B non situés sur une même verticale pour un mobile soumis à la seule force de pesanteur (utilisée dans les rampes d'accès, de skateboard ...). La solution s'exprime à l'aide de fonctions trigonométriques, c'est un arc de *cycloide*, courbe générée par un point située sur une roue se déplaçant en roulant sans glissement sur un axe.

1 Cercle trigonométrique et radian

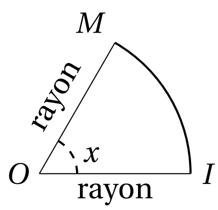
1.1 Proportionnalité entre mesure d'arc et mesure d'angle au centre

Théorème 1

Le rapport entre la circonférence d'un cercle (ou périmètre d'un disque) et son diamètre est constant.
Cette constante est notée π. Archimède a démontré que $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$.

Propriété 1

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points I et M des points appartenant à $\mathscr{C}$ tels que l'angle au centre $\widehat{IOM}$ a une mesure de x degrés avec x compris entre 0° et 360°.
Le rayon du cercle est OI.



- La longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre $\widehat{IOM}$:

$$\boxed{\textbf{Longueur de } \widehat{IM} = \textbf{rayon} \times \frac{x}{180} \times \pi}$$

En particulier le périmètre du disque, intercepté par un angle au centre de mesure 360° est de :

$$\boxed{\textbf{Périmètre du disque} = \textbf{rayon} \times 2\pi}$$

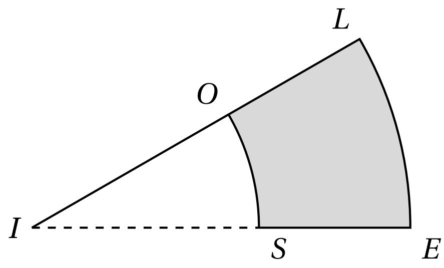
- L'aire du secteur circulaire de frontières l'arc $\widehat{IM}$ et les rayons $[OI]$ et $[OM]$ est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre $\widehat{IOM}$:

$$\boxed{\textbf{Aire du secteur d'angle au centre } \widehat{IOM} = \textbf{rayon}^2 \times \frac{x}{360} \times \pi}$$

En particulier l'aire du disque complet, intercepté par un angle au centre de mesure 360° est de

$$\boxed{\textbf{Aire du disque} = \textbf{rayon}^2 \times \pi}$$

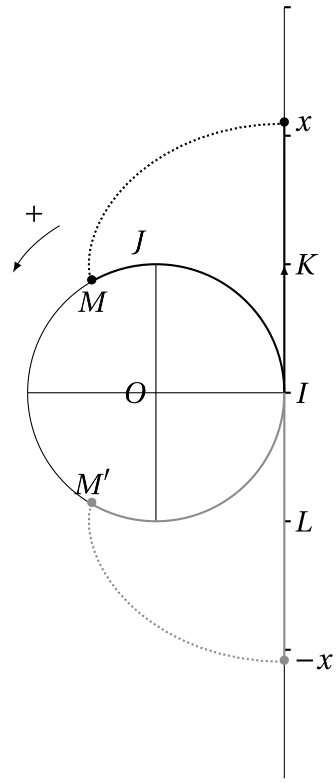
Capacité 1 *Déterminer la longueur d'un arc*



Dans la figure ci-contre, les point S et O appartiennent à un cercle de centre I et de rayon 3 et les points L et E appartiennent à un cercle de centre I et de rayon 5. De plus on a $\widehat{SIO} = 30°$.

1. Déterminer le périmètre de la figure $SOLE$.
2. Déterminer l'aire de la figure $SOLE$.

1.2 Repérage sur le cercle trigonométrique



Définition 1

Un **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 dont le sens de parcours est orienté positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, qu'on appelle **sens direct** ou sens **antihoraire**.

Propriété 2 *enroulement de la droite des réels sur un cercle trigonométrique*

Soit un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O sur lequel on choisit un point I. On trace une droite des réels tangente à $\mathscr{C}$ en I et de repère (I, K). On note aussi L le point qui a pour abscisse -1 sur la droite (IK).

- Si on enroule sur le cercle Γ, la demi-droite $[IK)$ des réels positifs dans le sens direct et la demi-droite

$[IL)$ des réels négatifs dans le sens indirect, à tout réel x correspond un unique point M du cercle $\mathscr{C}$, appelé **image de** x sur le cercle Γ.

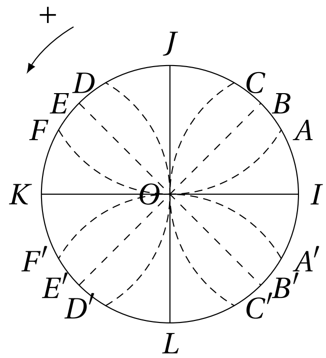
- Réciproquement, tout point M du cercle $\mathscr{C}$ est l'image d'une infinité de points de la droite (IJ). Si M est l'image du réel x alors M est l'image de tous les réels $x + k2\pi$ avec k entier relatif.

Corollaire

Deux réels x et y ont pour image le même point du cercle trigonométrique si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $\boxed{x = y + k \times 2\pi}$.

Capacité 2 *Repérer un point sur le cercle trigonométrique*

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ci-contre.



1. Quelle est la nature du triangle JOA ? En déduire la longueur de l'arc $\widehat{JA}$ puis celle de l'arc $\widehat{IA}$.
2. Déterminer les points images sur le cercle $\mathscr{C}$ des réels suivants :

   a. π **d.** $\frac{\pi}{3}$ **g.** $-\pi$ **j.** $-\frac{\pi}{2}$

   b. 4π **e.** $\frac{\pi}{2}$ **h.** $\frac{4\pi}{3}$ **k.** -2047π

   c. $\frac{\pi}{6}$ **f.** $\frac{\pi}{4}$ **i.** $-\frac{4\pi}{3}$ **l.** $-5 \times \frac{\pi}{4}$

3. Déterminer trois réels ayant pour image sur le cercle trigonométrique :

   - le point L
   - le point F
   - le point A'
   - le point E'

Algorithmique 1 *Mesure principale*

On considère l'algorithme ci-dessous présenté sous forme de fonction et sa traduction en Python.

Algorithme

```
Fonction mesure_principale(x):
   Tant que x > π
      x ⟵ x − 2π
   Tant que x ⩽ −π
      x ⟵ x + 2π
   Retourne x
```

Python

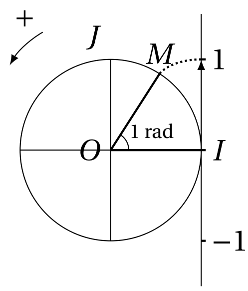
```python
from math import pi

def mesure_principale(x):
    while x > pi:
        x = x - 2 * pi
    while x  <= -pi:
        x = x + 2 * pi
    return x
```

1. Déterminer les valeurs retournées par `mesure_principale(`$25\pi/3$`)`, `mesure_principale(`$-15\pi/6$`)`, `mesure_principale(`π`)`, `mesure_principale(`$-\pi$`)` et `mesure_principale(`-2047π`)`.
2. Pour quelles valeurs du paramètre `x`, les deux boucles ne sont-elles pas exécutées lors de l'appel `mesure_principale(x)` ?
3. Que peut-on dire des points images de `x` et `mesure_principale(x)` ?
4. Déterminer un intervalle contenant `mesure_principale(x)` pour toute valeur de `x`.

1.3 Mesure en radian d'un angle géométrique

Définition 2



Soit un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O et un point I du cercle tel que la droite des réels tangente à $\mathscr{C}$ en I est enroulée sur le cercle.
Soit M le point image du réel 1.

- On définit une nouvelle unité de mesure des angles géométriques appelée **radian** (abréviation **rad**) telle que la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ soit de 1 radian.
- Si A et B sont deux points du cercle trigonométrique, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Propriété 3

Les échelles de mesures d'angles en radians et en degrés sont proportionnelles :

$$\boxed{\textbf{Mesure en radians} = \textbf{Mesure en degrés} \times \frac{\pi}{180}}$$

Capacité 3 *Convertir une mesure d'angle de radian en degré et réciproquement*

1. Convertir en degrés les mesures d'angles suivantes données en radians :
   - $\frac{\pi}{5}$
   - $\frac{7\pi}{12}$
   - 1
   - $\frac{4\pi}{3}$
2. Convertir en radians les mesures d'angles suivantes données en degrés :

- 50°
- 1°
- 10°
- 120°

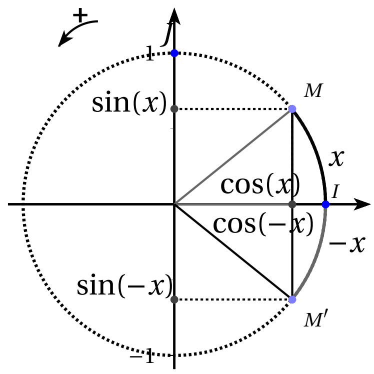
2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

2.1 Définitions

Définition 3

Soit (O ; I ; J) un repère orthonormal direct du plan :

$$\begin{cases} OI = OJ = 1 \\ \widehat{IOJ} = \dfrac{\pi}{2} \text{ et } IOJ \text{ orienté dans le sens direct} \end{cases}$$



Pour tout réel x d'image M sur le cercle trigonométrique de centre O :

- le **cosinus** de x, noté $\cos x$ est **l'abscisse** de M ;
- le **sinus** de x, noté $\sin x$ est **l'ordonnée** de M .

Capacité 4 ***Lier le signe du cosinus et du sinus au cercle trigonométrique***

Déterminer le signe de $\cos x$ et $\sin x$ dans chaque cas :

1. $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ **2.** $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$ **3.** $x \in \left[\pi ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ **4.** $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$

2.2 Propriétés

Propriété 4 ***propriétés fondamentales***

Pour tout réel x on a :

$$\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Démonstration

Soit x un réel et M le point repéré par x sur un cercle trigonométrique. Dans le repère orthonormal usuel d'origine le centre du repère, on a M de coordonnées $(\cos(x) ; \sin(x))$.
Un cercle trigonométrique étant de rayon 1, on en déduit que $OM = 1$ ce qui équivaut à $OM^2 = 1$.
Or d'après la formule de la distance entre les points $O(0 ; 0)$ et $M(\cos(x) ; \sin(x))$, on a

$$OM^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

- On a donc $\boxed{1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)}$.
- On en déduit que $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$.
- Or $0 \leqslant X^2 \leqslant 1$ équivaut à $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
- On en déduit que $\boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$ et $\boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$.

Propriété 5 *Valeurs remarquables*

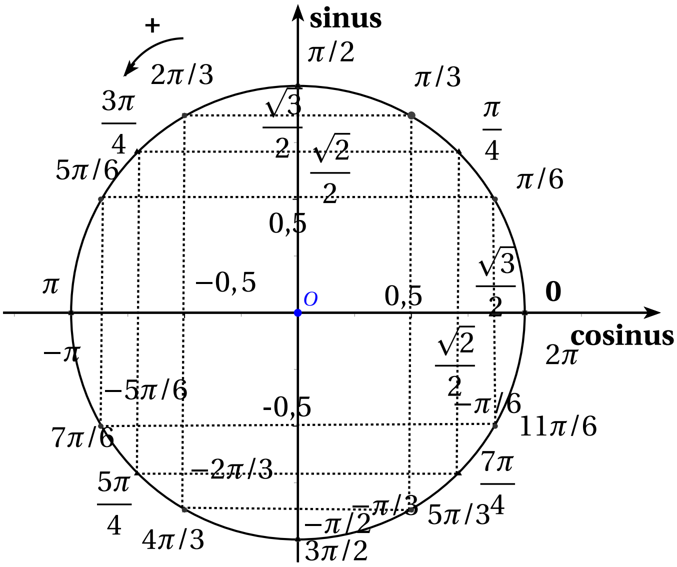


Tableau des valeurs remarquables de *cosinus* et de *sinus*.

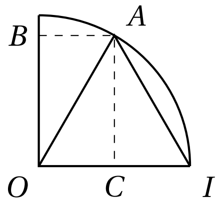
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration *voir pages* 90 *et* 91

- Calculs des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Le point A est repéré par $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique de centre O où le point I est repéré par 0.
Par définition $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est l'abscisse de A donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = OC$.
Dans le triangle équilatéral OAI, la médiane (AC) est aussi médiatrice du segment $[OI]$.
On en déduit que $OC = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}$.

OAI est un triangle équilatéral de côté 1.



Ainsi, on a $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$.

De même $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est l'ordonné de A donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = CA$.

Dans le triangle OCA rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a : $OA^2 = OC^2 + CA^2$.

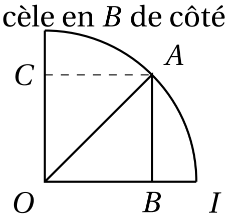
Or $OA = 1$, donc $1^2 = \frac{1}{4} + CA^2$ et donc $CA^2 = \frac{3}{4}$.

Comme $CA \geqslant 0$, on en déduit que $CA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

- Calculs des valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Le point A est repéré par $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique de centre O où le point I est repéré par 0.
Par définition $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est l'abscisse de A donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = OB$.
Dans le triangle OBA rectangle isocèle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a : $OA^2 = OB^2 + BC^2$.
Or on a $OB = BC$, donc $OA^2 = 2OB^2$.

OBA est un triangle rectangle isocèle en B de côté $OA = 1$.



Puisque $OA = 1$, l'égalité $OA^2 = 2OB^2$ équivaut à $\frac{1}{2} = OB^2$ qui équivaut à $\frac{1}{\sqrt{2}} = OB$ car $OB \geqslant 0$.

On en déduit que $OB = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi on a $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

De même, par définition $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est l'ordonnée de A donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = BA$.

Le triangle OBA est isocèle en B donc on a $BA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, on a $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Capacité 5 *Utiliser les valeurs remarquables du cosinus et du sinus*

1. Déterminer les valeurs exactes sans les notations cos et sin des expressions suivantes :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

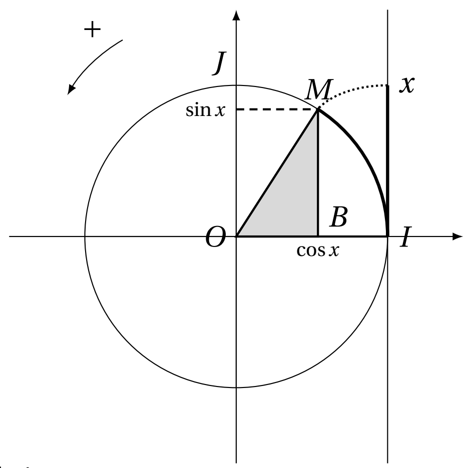
b. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

2.3 Lien avec la trigonométrie dans un triangle rectangle

Propriété 6



Soit un cercle trigonométrique de centre O et le repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\ \mathrm{I}\,;\ \mathrm{J})$associé.
Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et M son point image sur le cercle trigonométrique.
On appelle B le projeté orthogonal du point M sur le segment $[OI]$.
D'après la définition donnée ci-dessus les coordonnées de M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\ \mathrm{I}\,;\ \mathrm{J})$ sont $(\cos x\,;\,\sin x)$. On a donc $OB = \cos x$ et $BM = \sin x$.

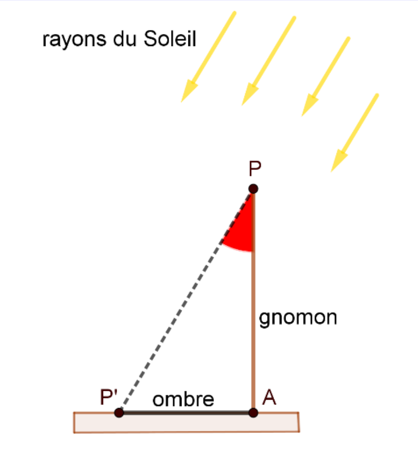
En appliquant les formules de trigonométrie étudiées au collège on obtient :

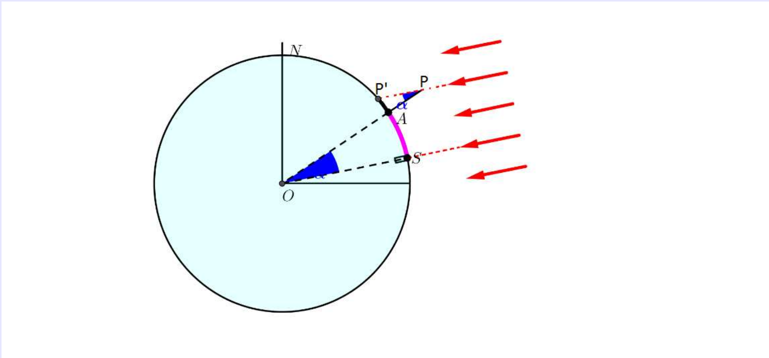
$$\cos\widehat{BOM} = \frac{OB}{OM} = \frac{OB}{1} = \cos x \qquad \sin\widehat{BOM} = \frac{BM}{OM} = \frac{BM}{1} = \sin x \qquad \tan\widehat{BOM} = \frac{BM}{OB} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Comme $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, la longueur x de l'arc $\widehat{IM}$ représente la mesure en radians de l'angle au centre $\widehat{IOM}$ et les définitions données pour le cosinus et le sinus au collège et au lycée concordent bien pour une mesure d'angle en radians dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Histoire 2 ***Calcul du méridien terrestre par la méthode d'Ératosthène***

Ératosthène (vers 276/196 avant J.C.) serait parti de la constatation suivante : « Dans la ville de Syène, à midi le jour du solstice d'été, le soleil éclaire le fond des puits ». Syène est approximativement située sur le tropique du Cancer, ce qui explique qu'au solstice d'été, le Soleil est à la verticale du sol. Cela permet aux rayons du soleil d'atteindre le fond des puits.
Le même jour à la même heure à Alexandrie, le Soleil n'est pas à la verticale. Ératosthène a mesuré l'angle entre les rayons solaires et la verticale en mesurant le rapport entre la longueur d'un *gnomon* (un bâton) planté verticalement et celle de son ombre.
Dans la figure de gauche, le gnomon est représenté par le segment $[AP]$ et son ombre par $[AP']$.





Syène et Alexandrie sont approximativement situées sur le même méridien. Dans la figure de droite, le point A correspond à Alexandrie, le point S à Syène et le point O au centre de la Terre. Les rayons du soleil étant parallèles, les droites (OS) et (PP') le sont.
De plus Ératosthène connaissait la distance entre Syène et Alexandrie, estimée à 5000 égyptiennes stades. Un stade égyptien correspond à environ $157,5$ mètres.
À partir de la mesure de l'angle $\widehat{APP'}$, Ératosthène en a déduit une estimation de la circonférence de la Terre. Plus de 2000 ans plus tard, Mohamed décide de reproduire l'expérience d' Ératosthène.

1. Pour un *gnomon* de 1 mètre, Mohamed mesure une ombre de $12,63$ cm. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{APP'}$ au centième de degré près.
2. Déterminer une valeur approchée au kilomètre près de la circonférence de la Terre par la méthode d'Ératosthène.

2.4 Approximation de π par la méthode d'Archimède

Voir le TP.

3 Fonctions trigonométriques

3.1 Définitions

Définition 4

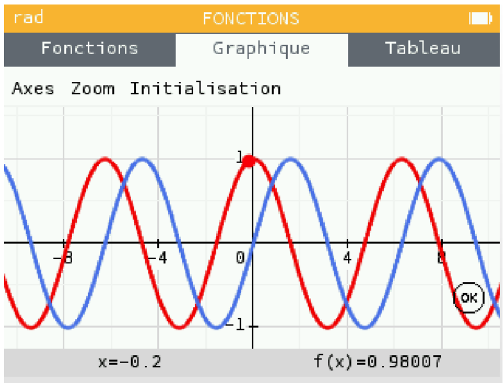
- La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
- La fonction **sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\sin(x)$.
- Les courbes des fonctions **cosinus** et **sinus** sont des **sinusoides**.

⚠ Pour utiliser les fonctions **cosinus** et **sinus** avec la calculatrice, il faut se placer en mode radian.

Capacité 6 ***Représenter les fonctions trigonométriques avec la calculatrice***

1. Représenter les courbes des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$ avec la calculatrice.

2. Quelles propriétés de ces courbes peut-on conjecturer ?



3.2 Parité

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

- f est paire si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a $\begin{cases} -x \in \mathscr{D}_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.

  $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $\left(O; \vec{\jmath}\right)$.

- f est impaire si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a $\begin{cases} -x \in \mathscr{D}_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

  $\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport au centre du repère.

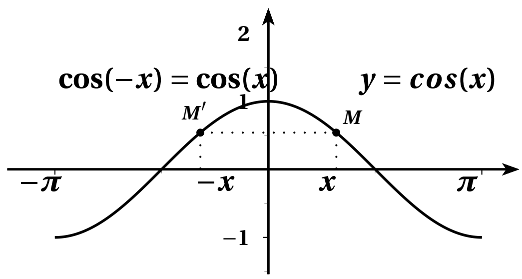
Propriété 7

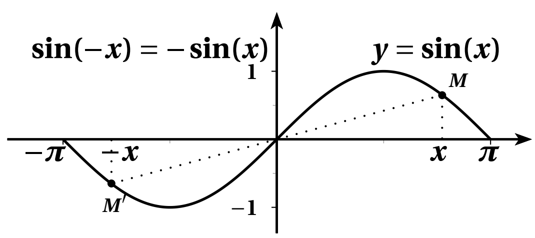
- Pour tout réel x on a :

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x)}$$

- La fonction **cosinus est paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

- La fonction *sinus est impaire*, sa courbe est symétrique par rapport au centre du repère.





3.3 Périodicité

Définition 6

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

- f est périodique de période T (réel non nul) si :

  pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $x + T$ appartient à $\mathscr{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

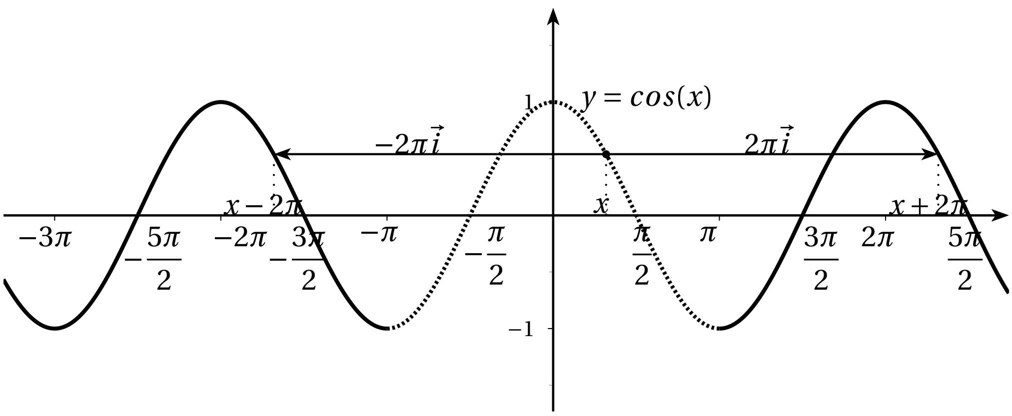
- $\mathscr{C}_f$ est alors invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$ ou $-T\vec{i}$.

Propriété 8

- Pour tout réel x on a :

  $$\boxed{\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)}$$

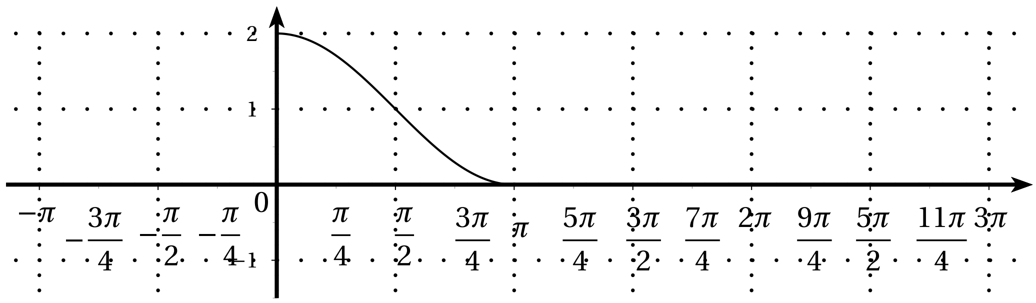
- Les fonction cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
- Dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les courbes des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$.



Capacité 7 ***Utiliser la parité et la périodicité d'une fonction trigonométrique***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \cos(x)$ dont on a représenté ci-dessous une partie de la courbe sur l'intervalle $[0; \pi]$.

1. Pour tout réel x comparer $f(x)$ et $f(-x)$. En déduire une propriété géométrique de la courbe de f.
2. Pour tout réel x comparer $f(x)$ et $f(x+2\pi)$. En déduire une propriété de la courbe de f.
3. Compléter le tracé de la courbe de f sur $[-\pi; 0]$ puis sur $[\pi; 3\pi]$.



3.4 Cosinus et sinus des angles associés

Propriété 9

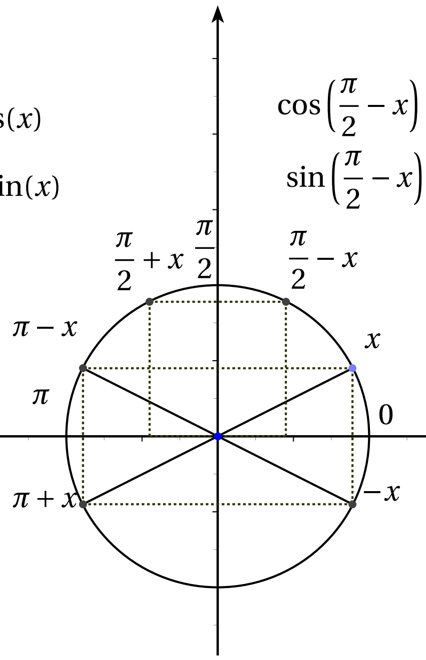
Pour tout réel x on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$$
$$\sin(\pi-x)=\sin(x)$$

$$\cos(x+k2\pi)=\cos(x)$$
$$\sin(x+k2\pi)=\sin(x)$$



$$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$$
$$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$$

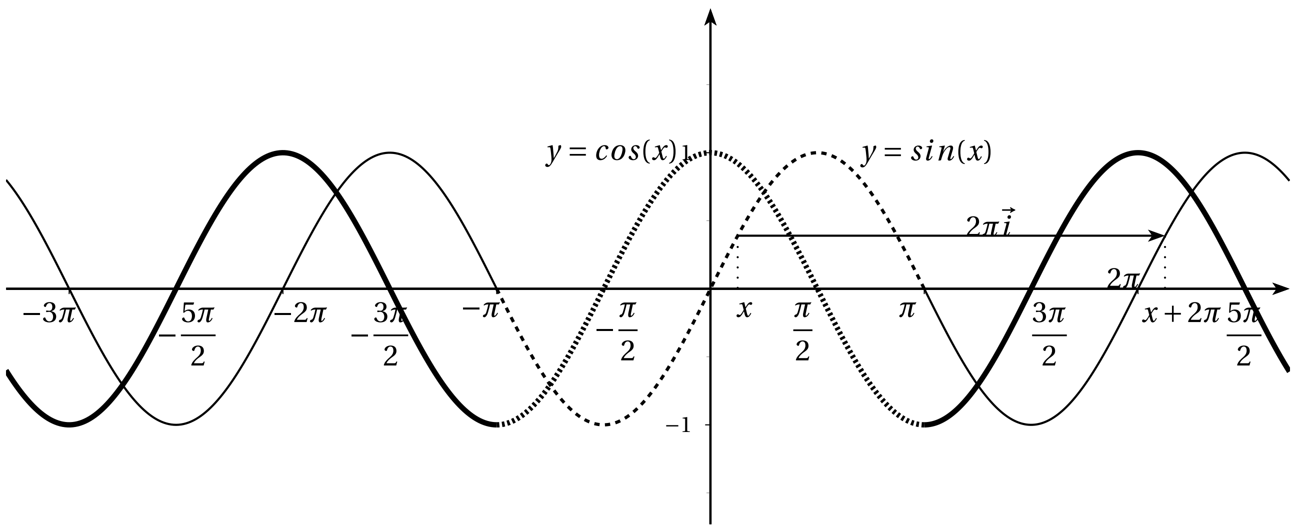
$$\cos(-x)=\cos(x)$$
$$\sin(-x)=-\sin(x)$$

3.5 Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Méthode

Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont appelées des sinusoides.

- Pour représenter la courbe de la fonction sinus dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan il suffit de la tracer sur $[0\,;\pi]$ puis on la complète sur $[-\pi\,;0]$ par symétrie de centre O (imparité) puis on la trace sur $[-\pi+k2\pi\,;\pi+k2\pi]$ (avec k entier relatif) par translation de vecteur $k2\pi\vec{\imath}$ (périodicité).
- Pour représenter la courbe de la fonction cosinus dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan il suffit de la tracer sur $[0\,;\pi]$ puis on la complète sur $[-\pi\,;0]$ par symétrie d'axe $\left(O;\vec{\jmath}\right)$ (parité) puis on la trace sur $[-\pi+k2\pi\,;\pi+k2\pi]$ (avec k entier relatif) par translation de vecteur $k2\pi\vec{\imath}$ (périodicité).

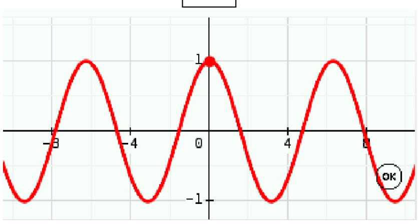


Capacité 8 ***Utiliser les propriétés de symétrie des fonctions cosinus et sinus***

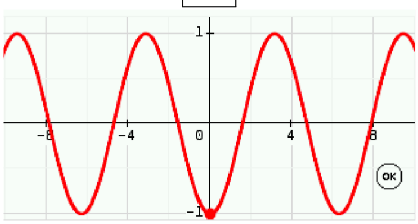
Associer à chaque fonction sa courbe représentative parmi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ ou $\mathscr{C}_3$.

- $f : x \mapsto \cos(\pi + x)$
- $g : x \mapsto \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$
- $h : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$
- $k : x \mapsto \cos(x - \pi)$
- $m : x \mapsto \cos(4\pi - x)$
- $n : x \mapsto \sin(6\pi - x)$

$\mathscr{C}_1$



$\mathscr{C}_2$



$\mathscr{C}_3$