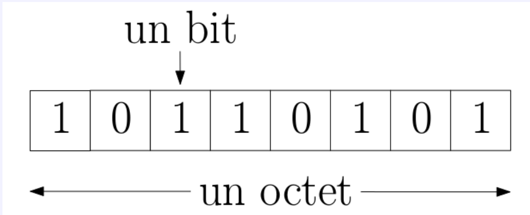
Introduction

La mémoire des ordinateurs est constituée d'une multitude de petits circuits électroniques (des transistors) et chacun ne peut être que dans deux états électriques : notés arbitrairement 0 et 1.
La valeur 0 ou 1 d'un circuit mémoire élémentaire s'appelle un **chiffre binaire**, un **booléen** ou un **bit** (abréviation de **binary digit**).
Depuis les années 1970, l'unité de mesure de l'espace (disque ou mémoire) est **l'octet** ou **byte**. Un octet correspond à 8 bits. Un octet peut donc prendre $2^8 = 256$ valeurs différentes.



En pratique, le processeur d'un ordinateur échange avec la mémoire des informations (données ou adresse mémoire) comportant plusieurs octets de 4 à 8 en général. On parle de **mots** qui caractérisent l'architecture de la machine (32 bits ou 64 bits).
Tout type d'information (nombre, caractère, couleur ...) peut être stocké sous forme de séquence de bits. Une **représentation interne** ou **codage** est nécessaire pour définir une représentation binaire. Dans ce chapitre, nous aborderons les codages simples des nombres entiers positifs et des entiers relatifs.

1 Représentation interne des entiers naturels

1.1 Représentation en base 10

Exemple 1

L'entier naturel 7307 s'écrit en base 10 comme une séquence de trois chiffres dont le poids dépend de leur position dans l'écriture.

Séquence de chiffres	7	3	0	7
Position	3	2	1	0
Poids	10^3	10^2	10^1	10^0

La décomposition de 7307 en base 10 s'écrit donc : $7307 = 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.

Exercice 1

1. Écrire en `Python` une fonction `chiffres2nombre(t)` qui renvoie l'entier naturel correspondant à la liste de ses chiffres en base 10.

   Les chiffres sont ordonnés dans un tableau par poids décroissant comme dans la représentation usuelle.

```
In [2]: chiffres2nombre([7,3,4])
Out[2]: 734
```

....

....

....

....

....

2. On considère l'algorithme d'Horner décrit ci-dessous :

```
Fonction horner(liste)
    nombre prend  la valeur 0
    Pour chiffre dans liste #on  commence par les chiffres de poids forts
        nombre prend  la valeur nombre x 10
        nombre prend la valeur nombre + chiffre
    Renvoyer nombre
```

a. Dérouler l'exécution de cet algorithme appliqué au tableau `[7, 3, 0, 7]`.

....

....

....

....

b. Implémenter en `Python` la fonction `horner`. Que fait cette fonction ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2

On donne ci-dessous une suite d'instructions permettant de collecter dans un tableau les chiffres de 73 en base 10.

```
In [15]: (n, t) = (73, [])
```

```
In [16]: t.append(n % 10)

In [17]: n = n // 10

In [18]: (n, t)
Out[18]: (7, [3])

In [19]: t.append(n % 10)

In [20]: n = n // 10

In [21]: (n, t)
Out[21]: (0, [3, 7])

In [22]: t.reverse()

In [23]: t
Out[23]: [7, 3]
```

1. Écrire en pseudo-code une fonction qui prend en paramètre un entier et renvoie le tableau de ses chiffres en base 10.

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Implémenter cette fonction en `Python`

....

....

....

....

....

....

....

....

1.2 Représentation en base 2

Théorème-Définition 1

La mémoire d'un ordinateur ne pouvant stocker que des séquences de bits à deux états, pour représenter un entier naturel en machine, il faut l'écrire en base deux où les seuls chiffres disponibles sont 0 et 1.
Pour se convaincre que tout entier naturel peut s'écrire en base deux, on pourra visionner la vidéo sur cette page `http://video.math.cnrs.fr/magie-en-base-deux/`.
Tout entier naturel n peut s'écrire de façon unique en base 2 sous la forme $b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0$ telle que :

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i \times 2^i \text{ avec } \forall i \in [\![0\,;k]\!],\ b_i \in [\![0\,;1]\!]$$

b_k est le bit de poids fort et b_0 est le bit de poids faible. Pour distinguer l'écriture en base 2 de l'écriture en base 10 on pourra écrire $\overline{101}^2$ pour par exemple l'écriture de 5 en base 2.

Exercice 3

1. Expliquer la formule suivante : « Il existe 10 catégories de personnes : celles qui comprennent le binaire et les autres.»

   ....

2. Compter jusqu'à 18 en binaire.

   ....

   ....

   ....

3. Quel est le plus grand entier non signé qu'on peut représenter en base 2 sur 64 bits ? sur n bits ?

   ....

4. C'est en $\overline{11110010000}^2$ qu'Alan Turing a défini sa machine à calculer universelle. Et en base dix ?

   ....

5. Écrire en `Python` une fonction `bits2nombre(t)` qui renvoie l'entier naturel (en base dix) représenté par le tableau de bits `t` avec les bits de poids fort à gauche.

```
In [26]: bits2nombre([1,1,0,1])
Out[26]: 13
```

   ....

....

....

....

....

....

Exercice 4

1. Regarder la vidéo sur la page http://video.math.cnrs.fr/magie-en-base-deux/.

2. En utilisant les algorithmes *glouton* et des *divisions successives* décrits dans la video, convertir en base 2 les entiers naturels d'écritures décimales 37 et 18.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Compléter le code de la fonction `codage_binaire_glouton(n)` qui renvoie un tableau de 0 ou de 1 représentant le codage binaire de l'entier `n` écrit en base 10 avec *l'algorithme glouton.*

```
def codage_binaire_glouton(n):
    binaire = []
    puissance2 = 1
    while puissance2 <= n:
        puissance2 = puissance2 * 2
    ...............................
    ...............................
    ...............................
    ...............................
    ...............................
    ...............................
    return binaire
```

4. Compléter le code de la fonction `codage_binaire2(n)` qui renvoie un tableau de 0 ou de 1 représentant le codage binaire de l'entier `n` écrit en base 10 avec l'algorithme des *divisions successives*.

```
def codageBinaire2(n):
    binaire = []
    while n >= 2:
        ................................
        ................................
        ................................
        ................................
        ...............................
    binaire.append(n)
    binaire.reverse()
    return binaire
```

Exercice 5

1. a. $\overline{10110}^{(2)} + \overline{1101}^{(2)}$ | b. $\overline{100111}^{(2)} \times \overline{101}^{(2)}$

....

....

....

....

....

2. Écrire en `Python` une fonction `additionBinaire8bits(t1, t2)` qui renvoie le tableau `t3` des bits de la somme des entiers représentés par les tableaux de bits `t1` et `t2`.

⚠ `t1`, `t2` et `t3` doivent être des tableaux de taille 8 correspondant à la représentation d'un entier sur un octet avec les bits de poids forts à gauche. Donner un exemple d'exécution où la fonction renvoie un résultat faux. Expliquer pourquoi.

```
In [29]: additionBinaire8bits([1,0,1,0,1,1,1,0],[0,0,0,0,1,1,1,1])
Out[29]: [1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
```

....

....

....

....

....

....

Méthode

- En Python, les entiers naturels et relatifs sont de type int et sont représentés de façon exacte, la seule limitation étant celle de la mémoire disponible.

```
In [2]: (type(734), type(-1))
Out[2]: (int, int)
```

- En Python, pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 2 vers la base 10, on préfixe la séquence de bits de 0b :

```
In [35]: 0b101
Out[35]: 5
```

- Pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 10 vers la base 2, on utilise la fonction bin :

```
In [36]: bin(5)
Out[36]: '0b101'
```

1.3 Représentation en base 16

Théorème-Définition 2

Plus généralement, on peut représenter un entier naturel dans n'importe quelle base.
Une base très utilisée en informatique est la **base** 16 ou **hexadécimale**.
On étend les dix chiffres de la base 10 avec A, B, C, D, E et F pour représenter 10, 11, 12, 13, 14 et 15.
En base 16 chaque octet est représenté par deux chiffres ce qui permet de condenser l'écriture.
Par exemple, chaque carte réseau possède une adresse MAC codée sur 48 bits soit 6 octets et représentée par une séquence de 6 chiffres en base 16 séparés par le caractère : sous la forme : `c8:60:00:a4:89:ab`
De même, les couleurs en représentation (R,G,B) sont codées sur 3 octets et dans le langage HTML des pages Web on les rencontre souvent notées comme séquence de six chiffres en base 16 préfixés par le caractère # : par exemple #FF0000 va coder un rouge pur.

Exercice 6

1. Convertir en base dix les entiers représentés en base 16 par $\overline{1A}^{16}$, $\overline{AF}^{16}$ et $\overline{FF}^{16}$.

   ....

   ....

2. La représentation hexadécimale s'obtient facilement à partir de la représentation binaire. Puisque $2^4 = 16$, pour convertir un octet de binaire en hexadécimal, il suffit de regrouper les bits par 4.

   Ainsi 154 représenté en binaire sur un octet par $\overbrace{\overline{1001}^{2}}^{\overline{9}^{16}}\overbrace{\overline{1010}^{2}}^{\overline{A}^{16}}$ a pour représentation hexadécimale $\overline{9A}^{16}$ car $9 \times 16 + 10 = 154$.

   Convertir de même en hexadécimal les octets suivants :

- $\overline{11101010}^2$
- $\overline{10011011}^2$
- $\overline{11000000}^2$

....

....

Méthode

☞ En `Python`, pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 16 vers la base 10, on préfixe la séquence de bits de `0x` :

```
In [5]: 0x9A
Out[5]: 154
```

☞ Pour convertir l'écriture d'un entier naturel de la base 10 vers la base 16, on utilise la fonction `hex` :

```
In [6]: hex(154)
Out[6]: '0x9a'
```

2 Représentation interne des entiers relatifs

Contenus inspirés par le cours de mon collègue Pierre Duclosson.
Dans cette partie, on présente deux représentations internes des entiers relatifs en binaire.

2.1 Par signe et valeur absolue

Méthode *Signe et valeur absolue*

Une première idée consiste à réserver le premier bit (celui le plus à gauche, dit "bit de poids fort") au signe de l'entier (par exemple 0 pour positif et 1 pour négatif) et les $n-1$ autres bits à la valeur absolue. Sur 8 bits, on peut ainsi représenter les entiers entre -127 et 127 :

signe	64	32	16	8	4	2	1
0	0	1	1	0	1	1	1

55

signe	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	0	1	0	1

-21

Exercice 7

1. Le nombre 0 possède-t-il une unique représentation par signe et valeur absolue ?

....

2. Effectuer l'addition binaire ci-dessous en appliquant l'algorithme usuel (bit par bit de la droite vers la gauche avec propagation de retenue).

	0	0	1	1	0	1	1	1	$\longrightarrow 55$
$+$	1	0	0	1	0	1	0	1	$\longrightarrow -21$
$=$									$\longrightarrow$

À quel problème est-on confronté ?

....

....

....

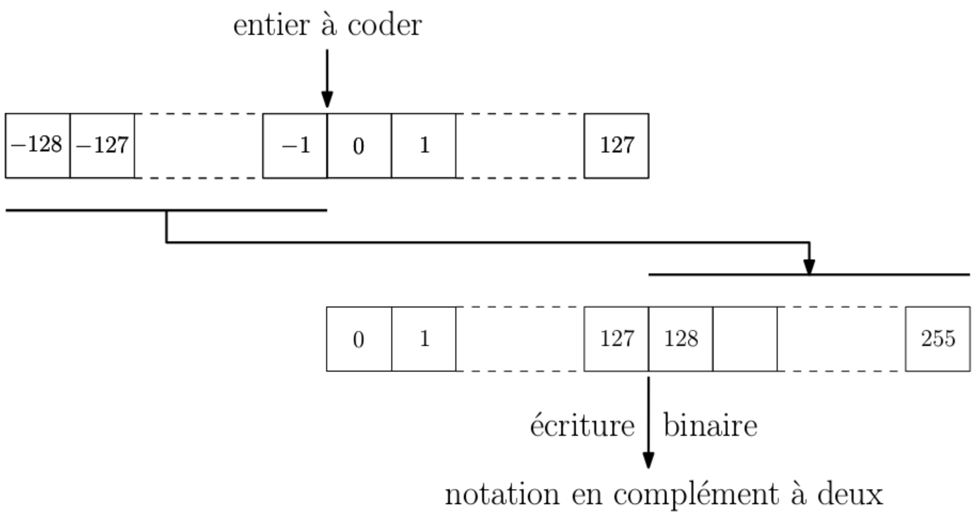
....

2.2 Par complément à 2

Méthode *Complément à* 2

Commençons par regarder le cas particulier des entiers codés sur un octet.
La **représentation en complément à 2** consiste à représenter les entiers entre -128 et 127 (au lieu de 0 à 255) de la manière suivante :

- si $x \in [\![0;127]\!]$ alors x est codé par son écriture binaire sur un octet.
- si $x \in [\![-128;-1]\!]$ alors x est codé par l'écriture binaire de $x+256$ sur un octet.



Ainsi, on fait correspondre à chaque entier de $[\![-128;127]\!]$ un entier de $[\![0;255]\!]$ qui est ensuite codé sur 8 bits par sa représentation binaire. On remarquera que 0 admet alors une seule écriture : $\overline{00000000}^2$.
Par exemple la représentation en complément à deux sur 8 bits de -43 est $\overline{11010101}^2$ et celle de 117 est $\overline{01110101}^2$.

On remarque que le signe d'un entier est immédiat à déterminer via sa représentation en complément à deux : il est donné par le bit de poids fort. Le nombre est positif ou nul lorsque le bit de poids fort vaut 0 et négatif sinon.
Nous pouvons maintenant généraliser à la représentation en complément à deux sur n bits. On représente les entiers entre -2^{n-1} et $2^{n-1}-1$ de la manière suivante :

- si $x \in [\![0\,;2^{n-1}-1]\!]$ alors x est codé par son écriture binaire sur n bits.
- si $x \in [\![-2^{n-1}\,;-1]\!]$ alors x est codé par l'écriture binaire sur n bits de $x+2^n$.

La figure ci-dessous illustre la représentation des entiers relatifs en complément à 2 sur 3 bits

décimal

0

binaire

−1   000   1

111   001

−2   110   010   2

101   011

−3   100   3

−4

Exercice 8

On souhaite représenter des entiers relatifs sur quatre bits en complément à 2.

1. Donner les représentations en complément à 2 sur quatre bits des entiers 1 et -1.

....

....

2. Vérifier si l'algorithme classique d'addition binaire appliqué à ces représentations donne bien 0 pour l'addition de 1 et de -1 et -2 pour l'addition de -1 et -1 (en excluant la dernière retenue sortante).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ainsi il n'est pas nécessaire d'avoir deux algorithmes distincts pour l'addition et la soustraction. Par rapport à la représentation par signe et valeur absolue, cela se traduit dans l'implémentation matérielle de l'addition par une réduction du nombre de portes logiques et donc une économie de transistor et une simplification des circuits.

3. Que donne l'addition des représentations de 7 et 1 sur 4 bits en complément à deux? Commenter

....

....

....

....

....

....

4. Pour obtenir la représentation en complément à 2 sur n bits de l'opposé d'un entier naturel inférieur ou égal à $2^{n-1}-1$, il suffit de prendre le complément de chaque bit de sa représentation binaire ($0 \to 1$ et $1 \to 0$) et d'ajouter 1. Justifier cet algorithme à partir de la définition de la représentation en complément à 2.

....

....

....

....

....

....

5. La classe `int8` du module `numpy` permet de créer des entiers signés codés sur 8 bits. Commenter les résultat des exécutions ci-dessous :

```
In [12]: import numpy

In [13]: numpy.int8(127) + numpy.int8(1)
__main__:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars
Out[13]: -128
```

```
In [14]: numpy.int8(-127) + numpy.int8(-2)
__main__:1: RuntimeWarning: overflow encountered in byte_scalars
Out[14]: 127
```

....

....

6. Écrire un un jeu de tests unitaire pour la fonction `complement_deux(n, nbits)` dont on donne la spécification ci-dessous puis coder la fonction. On utilisera la fonction `codage_binaire2(n)` écrite à l'exercice 4.

```
from typing import List

def complement_deux(n:int, nbits:int)->List[int]:
    """
    Renvoie la notation en compléments à 2 de l'entier signé n
    sous la forme d'un tableau de bits ordonnés de gauche à droite
    par poids décroissant

    Parameters
    ----------
    n : int   Précondition -2**(nbits-1) <= n < 2**(nbits-1)
    nbits : int

    Returns
    -------
    List[int] tableau de nbits bits
    """
    ............................................
    ............................................
    ............................................
    ............................................
    ............................................
    ............................................
    ............................................
    ............................................

# Jeu de tests unitaires
assert complement_deux(0, 8) == [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
assert complement_deux(5, 8) == [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]
assert complement_deux(2**7 - 1, 8) == [0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
assert complement_deux(-2**7, 8) == [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
assert complement_deux(2**7 - 2, 8) == [0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]
assert complement_deux(-2**7 + 1, 8) == [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
assert complement_deux(-1, 8) == [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
assert complement_deux(-2, 8) == [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]
```