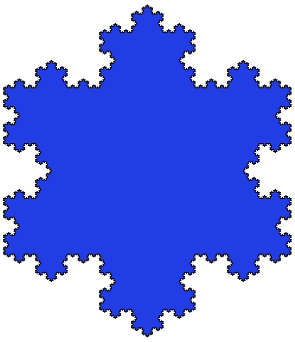
A la découverte des fractales

1 Benoît Mandelbrot et les objets fractals

En 1974, Benoît Mandelbrot, mathématicien français exilé aux USA (et ancien élève du lycée du Parc), publie un ouvrage intitulé « Les objets fractals » qui connaît un vif succès auprès de la communauté scientifique et aussi du grand public. Mandelbrot s'appuie sur des exemples tirés de la nature (feuilles de fougères, forme des nuages, allure de la côte bretonne) et sur des objets mathématiques *monstrueux* comme le flocon de Von Koch pour définir une nouvelle classe d'**objets fractals** situés hors du champ de la géométrie traditionnelle. L'adjectif fractal est un néologisme forgé par Mandelbrot à partir de la racine latine *fractus* qui signifie brisé. Cet adjectif a été substantivé en *fractale*.
Beaucoup d'objets fractals (on n'écrit pas fractaux), mais pas tous, possèdent la propriété d'**auto-similarité** c'est-à-dire que le tout est identique à l'une de ses parties. Par exemple pour la courbe de Von Koch, quel que soit l'échelle à laquelle on l'observe, on peut noter exactement les mêmes détails. Ce n'est pas le cas pour toutes les fractales : dans l'ensemble de Mandelbrot, on retrouve les mêmes structures à des échelles différentes mais pas rigoureusement identiques.



Flocon de Von Koch

Feuille de fougère

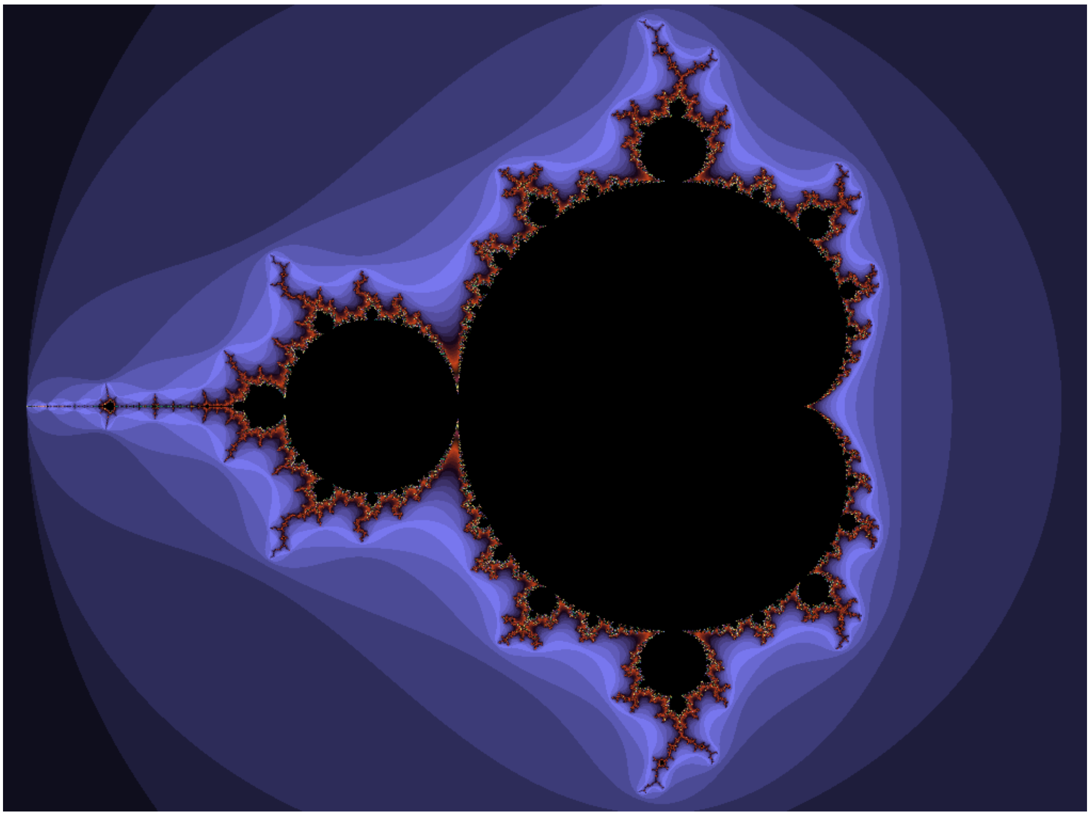
Mandelbrot donne la définition suivante d'un objet fractal :

> *Un objet fractal a une dimension de Hausdorf supérieure à sa dimension topologique.*

Clarifier cette définition est un objectif de la séquence.
Les fractales comme l'ensemble de Mandelbrot représenté ci-après sont des objets mathématiques qui donnent de magnifiques images mais elles peuvent aussi modéliser beaucoup de formes naturelles (fougères, arbres, nuages, système pulmonaire ou coronaire d'un être humain ...) ou de phénomènes divers (mouvement brownien, cours d'une action ...).

> *La structure fractale des poumons est déterminée par le code génétique contenu dans chaque cellule. La morphogenèse du système des bronches rappelle la pousse des arbres. A chaque étape, le nombre de terminaison est doublé, et après 16 étapes de la sorte, on obtient 216, soit environ 60 000, bronchioles qui mènent à 60 000 acini, le nombre correspondant au poumon humain normal[...]On peut conclure que les poumons sont bien un exemple d'images fractales du fait de leur structure*

construite par dichotomisations successives. Leur structure complexe, et ramifiée correspond à une fractale naturelle et permet une surface optimale d'échange gazeux avec l'environnement. Cette surface d'échange est proche de 200m^2.



Ensemble de Mandelbrot

2 La courbe de Koch, une fractale pour mesurer la longueur de la côte bretonne

Le mathématicien suédois Von Koch a défini en 1906 une courbe obtenue par itérations successives d'un même procédé de construction décrit ci-dessous. Mandelbrot s'est inspiré de cette courbe dans son article de 1968 sur la longueur de la côte bretonne.

- on trace d'un segment qu'on divise en 3
- on construit un triangle équilatéral de base le tiers central, orienté vers le haut et on ne trace pas sa base
- on obtient ainsi 4 segments de longueur $\frac{1}{3}$ du segment initial
- on réitère le procédé sur chacun de ces 4 segments

La courbe de Koch est obtenue lorsqu'on itère à l'infini ce procédé.
Ainsi la courbe de Koch est constituée de 4 courbes de Koch obtenue par réduction d'un facteur $\frac{1}{3}$, cette courbe est donc rigoureusement auto-similaire, c'est une fractale.
Pour représenter une courbe de Koch approchée, on doit se contenter d'un nombre fini d'itérations. C'est le cas pour toutes fractales mathématiques définies par itérations d'un procédé *ad infinitum*. Les structures fractales naturelles comme les feuilles de fougères ou l'arbre bronchique d'un être humain comportent un nombre fini d'itérations.

itération 0 **itération 1** **itération 2**

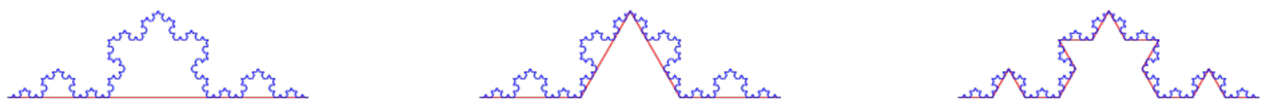
1. Compléter à la main la représentation de la courbe de Koch ci-dessus avec une troisième itération.

2. Si on observe la côte bretonne sur une photo satellite, on observe ne répétition de caps et de baies. La baie ou le cap à l'échelle d'une vue depuis un satellite apparaissent eux-même constitués de baies et de caps à l'échelle d'une vue prise depuis un avion. Et si on parcourt la côte à pied on verra apparaître d'autres structures plus petites en forme de baie ou de cap et si on observe ces structures à la loupe, d'autres baies ou caps surgissent ...

   Ainsi la côte bretonne (mais pas la côte aquitaine) est une structure fractale qui possède une propriété d'auto-similarité comme la courbe de Koch, même si les formes réduites ne sont rigoureusement identiques.

   Par analogie, on peut ramener l'étude du problème de la mesure de la côte bretonne à celle de la mesure de la courbe de Koch.

   On a réprésenté ci-dessous de façon approchée la courbe de Koch après 4 itérations. Pour la mesurer on choisit un étalon (une règle de mesure élémentaire) et en partant d'un bout de la courbe on reporte notre étalon autant de fois que l'ont peut en reliant deux points successifs de la courbe. Ainsi on approche la longueur totale de la courbe par la longueur d'une courbe approchée construite par itérations successives. La longueur de l'étalon peut être assimilée à l'échelle d'observation de la courbe.



étalon 1 **étalon $\frac{1}{3}$** **étalon $\frac{1}{9}$**

   a. Quelle estimation de la longueur de la courbe de Koch peut-on donner avec un étalon de longueur 1 (longueur du segment initial) ? de longueur $\dfrac{1}{3}$? de longueur $\dfrac{1}{9}$? de longueur $\dfrac{1}{27}$?

   b. On peut considérer que plus l'étalon utilisé est petit, plus l'estimation de la longueur de la courbe de Koch est précise.
   Si on divise par trois l'étalon, comment évolue l'estimation de la longueur ?
   Conjecturer l'estimation de la longueur obtenue après n divisions par 3 successives de l'étalon initial donc avec un étalon de longueur $\dfrac{1}{3^n}$.

   c. La longueur de la courbe de Koch est-elle finie ? Justifier.
   Par analogie, que peut-on dire de la longueur de la côte bretonne ?

   d. La courbe de Koch peut-elle être contenue dans une surface finie ? Justifier.

3 Le document projet

La séquence sur les fractales se découpera en quatre séances avec pour objectif la réalisation d'un document projet :

- **Séance 1** : découverte des fractales avec le logiciel Xaos, recherches documentaires, début du projet

- **Séance 2** : poursuite des recherches documentaires et du projet, construction de fractales avec Geogebra
- **Séance 3** : fin des recherches documentaires, poursuite du projet, découverte de la récursivité et programmation de fractales avec le module `turle` de Python ou avec Snap.
- **Séance 4** : finalisation du projet

Au terme des quatre séances il faudra rendre un document projet sous la forme d'un diaporama réalisé avec LibreOffice Impress sur le thème *Fractales en mathématiques et dans la nature*. Ce document doit apporter des informations claires et précises, présentées de façon attrayante. Il doit inclure des illustrations de fractales réalisées à l'aide de Geogebra, Python (les codes sources Python ou les protocoles de construction Geogebra devront être fournis en Annexe du document projet) ou Snap (partager le projet et inclure le lien).
Les diapositives du diaporama devront traiter des thèmes suivants en utilisant au moins les mots clefs cités :

- **Thème 1 : Qu'est-ce-qu'un objet fractal ?**

  Mots clefs : Benoît Mandelbrot, dimension fractale, auto-similarité, courbe de Von Koch, côte bretonne, courbe infinie dans une surface finie
- **Thème 2 : Des exemples de fractales en mathématiques**

  Mots clefs : triangle de Sierpinski, ensemble de Mandelbrot, ensemble de Julia, courbe de Von Koch, récursivité
- **Thème 3 : Les fractales dans la nature ou le corps humain**

  Mots clefs : feuille de fougère, choux, côte bretonne, les poumons, le réseau sanguin

Les sources des images utilisées devront être citées et en annexe du diaporama devra figurer une bibliographie et sitographie dûment complétée en respectant les normes de citation énoncées sur cette page web `https://www.reseau-canope.fr/savoirscdi/index.php?id=1035`.

Le recherche documentaire s'effectuera principalement sur Internet pendant les séances mais il ne faudra pas négliger l'exploration du fonds du CDI : encyclopédies, ouvrages de vulgarisation scientifique, revues scientifiques telles que Tangente ...

Les activités réalisées autour des logiciels Xaos, Geogebra, Python ont pour but d'explorer les aspects mathématiques des fractales et de réaliser des représentations de fractales.

Ce que vous présenterez dans votre panneau sur les fractales dans la nature dépendra de vos recherches documentaires, mais le professeur pourra vous guider et une sitographie vous est fournie à la fin du document.

4 Découvrir les fractales avec le logiciel Xaos

Le logiciel Xaos permet d'explorer les fractales les plus connues et il propose un didacticiel ludique et instructif.
L'URL de la page d'accueil du site officiel est `http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php`
On peut télécharger des installateurs du logiciel pour tout type de plateforme (Linux,Windows,MacOs).
Les menus sont activés lorsqu'ils sont précédés de la lettre X.

1. Pour découvrir les fractales, sélectionner la présentation générale dans `Aide>Didacticiel>Introduction aux fractales>Intoduction`.
2. Pour en savoir plus sur l'ensemble de Mandelbrot, sélectionner `Aide>Didacticiel>Introduction aux fractales>Ensemble de Mandelbrot`.

3. Pour en savoir plus sur l'ensemble de Julia, sélectionner `Aide>Didacticiel>Introduction aux fractale` `de Julia`.

4. Pour en savoir plus sur les mathématiques cachées dans les fractales, sélectionner `Aide>Didacticiel>Les maths derrière les fractales>Tous les détails`.

5. On peut explorer l'ensemble de Mandelbrot en activant le menu `Fractales>Valeur par défaut`. On peut faire un zoom avant avec un clic droit, un zoom arrière avec un clic gauche, saisir l'image pour la déplacer en maintenant appuyée la molette ou le bouton central. On peut aussi activer le mode pilote automatique avec `Interface>Pilote automatique`.

   Si on obtient une image qui nous plaît, on peut l'enregistrer au format `png` avec `Fichier>Enregistrer image`.

6. Pour explorer un ensemble de Julia, on charge d'abord l'ensemble de Mandelbrot puis en activant le menu `Calculs>Julia rapide`, on peut cliquer sur un point de l'ensemble de Mandelbrot pour obtenir une miniature de l'ensemble de Julia correspondant. On obtient alors celui-ci en désactivant le menu `Fractals>Mode Mandelbrot`.

5 Sitographie

Quelques URL de pages web sur les fractales :

- Page web d'un professeur de mathélamatiques :

  `http://prof.pantaloni.free.fr/spip.php?rubrique14`

- Dossier du site web Futurasciences :

  `http://www.futura-sciences.com/magazines/mathematiques/infos/dossiers/d/mathematiques-`

- Page web du site Chronomaths sur Benoît Mandelbrot :

  `http://serge.mehl.free.fr/chrono/Mandelbrot.html`

- Rubrique de Wikipedia :

  `http://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale`

- Fractales du vivant et fractales en général :
  `http://fractalesland.free.fr/`
- Formes fractales dans la nature :
  `http://sites.univ-provence.fr/~ufrsm/filieres/LicPlurid/fractales/fractaleweb.html`