

Epidémiologie, l'urne de Pólya, partie I

L'épidémiologie est la connaissance des épidémies (grippe, SIDA, ...), elle représente de vastes enjeux pour la santé publique et la prévention de la santé personnelle.

Plusieurs modèles mathématiques permettent de prévoir l'évolution d'une épidémie.

Nous allons en étudier quelques uns par des simulations numériques à l'aide du tableur ou d'un langage de programmation.

Rédiger un compte-rendu de TP avec les réponses à toutes les questions traitées et les formules utilisées pour les feuilles de calcul sous tableur.

1 Présentation

György Pólya, mathématicien hongrois (1887-1985) a introduit une expérience avec une urne pour simuler la propagation d'une épidémie.

On considère une urne contenant au départ une **boule blanche** (modélisant un **individu sain**) et une **boule rouge** (modélisant un **individu malade** et contagieux).

On prélève au hasard une boule de l'urne, si elle est blanche, on la remet avec une autre blanche, si elle est rouge on la remet avec une autre rouge. On a maintenant trois boules, dont deux de la même couleur.

Ceci modélise l'arrivée d'un nouvel individu dans la population initiale. S'il entre en contact avec la personne saine, il demeure sain. S'il entre en contact avec la personne malade, il le devient également.

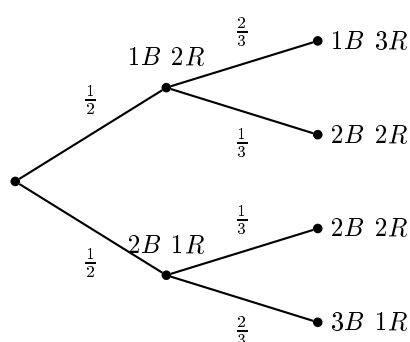
On itère ce processus aussi longtemps que l'on veut.

A l'aide d'une recherche documentaire sur internet :

1. Définir en cinq lignes minimum, la notion d'épidémiologie.
2. Ecrire en une dizaine de lignes, une notice biographique du mathématicien György Pólya.

2 Etude probabiliste

On considère que l'urne contient initialement une boule blanche (individu sain) notée B et une boule rouge (individu malade) notée R.



L'arbre pondéré ci-dessus représente l'évolution de la composition de l'urne après deux itérations (étape 3). L'arbre est constitué de noeuds reliés par des branches. Il y a un noeud racine qui représente l'état initial (1B 1R) de l'urne d'où partent deux branches vers les deux états possibles lorsqu'on rajoute une boule :

- la boule rajoutée est rouge si on a prélevé une rouge et on aboutit alors au noeud (1B 2R) avec une probabilité de $\frac{1}{2}$

- la boule rajoutée est blanche si on a prélevé une blanche et on aboutit alors au noeud (2B 1R) avec une probabilité de $\frac{1}{2}$

Si on réitère le procédé à partir du noeud (1B 2R) par exemple :

- la boule rajoutée est rouge si on a prélevé une rouge et on aboutit alors au noeud (1B 3R) avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
- la boule rajoutée est blanche si on a prélevé une blanche et on aboutit alors au noeud (2B 2R) avec une probabilité de $\frac{1}{3}$

1. Au bout de deux itérations (étape 3), combien existe-t-il de compositions d'urnes différentes (en nombre de boules blanches et rouges) ?

Calculer puis comparer les probabilités de chaque composition. Que remarque-t-on ?

2. Compléter l'arbre pondéré pour obtenir les différentes compositions de l'urne au bout de quatre itérations (étape 5).

Calculer puis comparer les probabilités de chaque composition. Peut-on faire la même remarque que dans la question 1. ?

3 Simulation de l'urne de Pólya avec un tableur

On va simuler l'évolution de l'urne de Pólya avec le tableur Calc de la suite LibreOffice de logiciels libres de bureautique. On représente une étape par ligne à partir de la ligne 2 (étape initiale). Pour passer d'une étape à la suivante, on simule un tirage aléatoire dans l'urne, ainsi en ligne 100, on obtiendra une composition possible de l'urne à l'étape $100 - 2 + 1 = 99$.

1. Ouvrir une nouvelle feuille de calcul en cliquant sur l'icône LibreOffice, puis compléter les en-têtes de colonnes de la plage de cellule A1 : D1 comme dans le modèle ci-dessous.

On se place sur la ligne 2, correspondant à l'étape initiale. En B2, écrire le nombre initial de boules blanches (par exemple 1) et en C2, le nombre initial de boules rouges (par exemple 1).

En A2, écrire la formule =SOMME(B2:C2) ou =B2+C2, pour calculer le nombre total de boules dans l'urne à l'étape 1.

En D2, écrire la formule =B2/A2, pour calculer la proportion de boules blanches (individus sains) dans l'urne.

2. On va compléter l'étape deux (ligne 3)

a. Imaginons que la proportion initiale de boules blanches dans l'urne soit de 0,5. Si on tire un nombre au hasard dans l'intervalle $[0; 1[$, quelle la probabilité que ce nombre soit inférieur à 0,5 ?

b. La syntaxe de la commande SI de Calc est : =SI(test;résultat si test vrai;résultat si test faux) et on peut tirer au hasard un nombre dans l'intervalle $[0; 1[$ avec la commande ALEA().

Avec la question précédente, justifier que le nombre de boules blanches dans l'urne à l'étape 2, après réalisation d'un tirage aléatoire, peut s'obtenir en écrivant en B3 la formule :

=SI(ALEA()<D2;B2+1;B2).

c. A chaque étape le nombre total de boules augmente d'une unité. En déduire la formule qu'on peut écrire en A3 pour avoir le nombre total de boules à l'étape 2.

Quelle formule peut-on alors écrire en C3 pour obtenir le nombre de boules rouges à l'étape 2 ?

Recopier vers le bas la ligne 3 jusqu'à la ligne 100.

B3						$f(x)$	Σ	=	=SI(ALEA()<D2;B2+1;B2)		
	A	B	C	D	E						
1	n	a (blanche)	b (rouge)	a/n							
2	2	1	1	0,5000000							
3	3	1	2	0,3333333							
4	4	1	3	0,2500000							

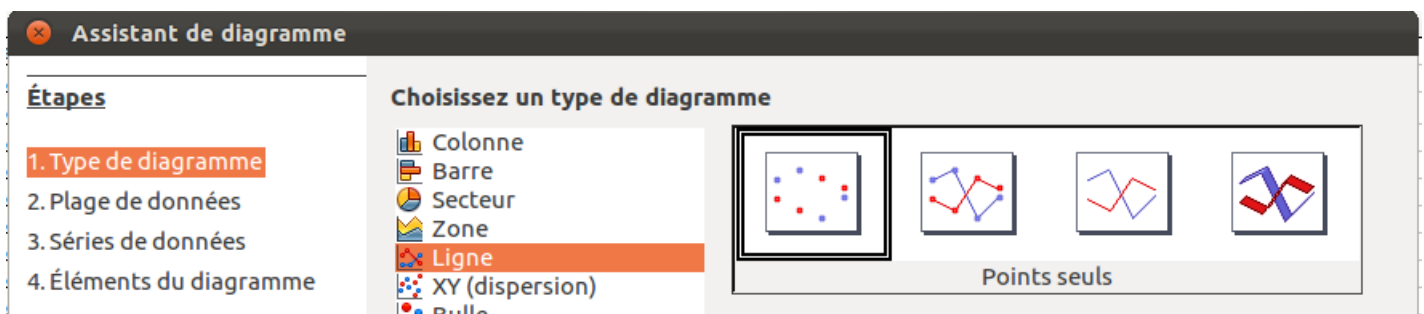
d. Chaque appui sur la touche F9 déclenche une nouvelle simulation.

Pour une simulation donnée, comment évolue la proportion de boules blanches dans l'urne (proportion d'individus sains) en fonction du nombre d'étapes ?

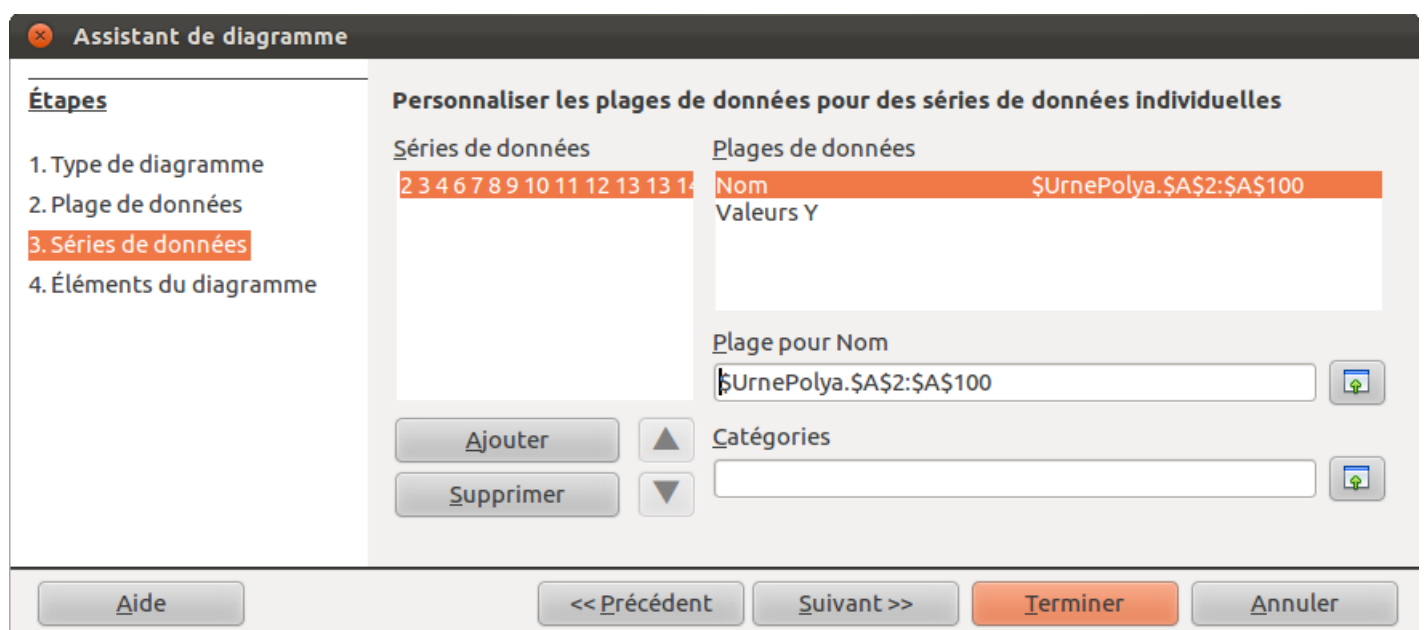
Lorsqu'on lance plusieurs simulations, peut-on dire que la proportion se stabilise toujours autour de la même valeur en fonction du nombre d'étapes ? Faire le lien avec une observation faite lors de l'étude probabiliste sur les probabilités des différentes compositions possibles de l'urne au bout d'un nombre fixé d'étapes.

e. Pour chaque simulation, représenter graphiquement l'évolution de la proportion de boules blanches en fonction du nombre de boules dans l'urne (nombre d'étapes+1), en cliquant sur l'icône diagramme dans la barre d'outils.

Etape 1 : choix du type de diagramme (Ligne)



Etape 2 : on clique sur Séries de données et on sélectionne la plage des nombres de boules pour Nom (abscisse)



Etape 3 : on sélectionne la plage des proportions de boules blanches pour Valeur Y (ordonnée)