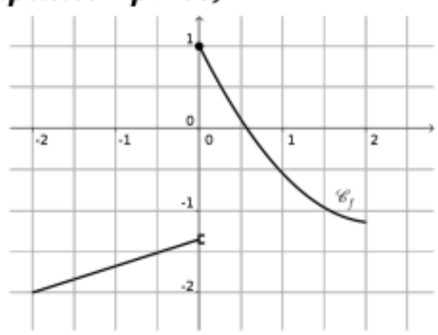
Corrigé des exemples du cours du chapitre continuité

Capacité 1 ***Étudier la continuité d'une fonction (voir capacité 1 p.203)***

1. Déterminer les points de continuité et de discontinuité de la fonction représentée ci-contre.
2. Représenter la courbe d'une fonction définie sur l'intervalle $[-2;2]$, telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et f ne s'annule pas sur $[-2;2]$.

   f peut-elle être continue sur $[-2;2]$?



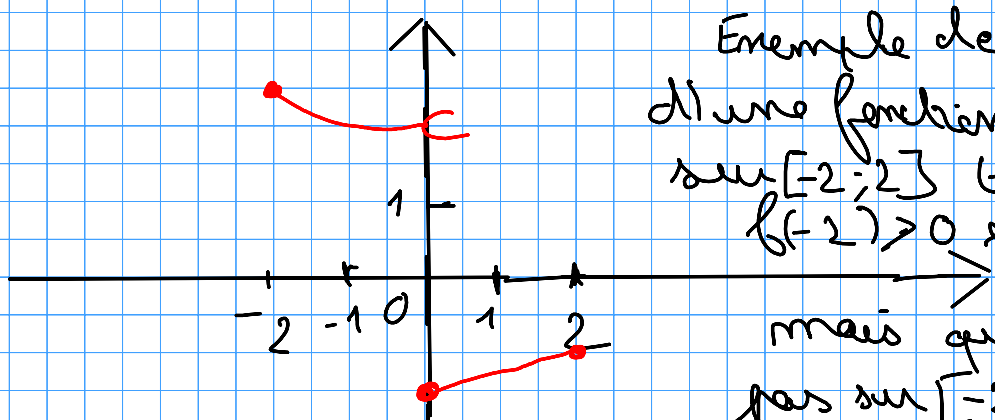
Source : Rico602 [CC BY-SA 3.0]

1) f continue sur $[-2;0[\cup]1;2]$

f discontinue en 0 car :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1{,}5 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$$

2)



Exemple de courbe d'une fonction f définie sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ mais qui ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On peut conjecturer qu'il n'existe pas de fonction continue sur $[-2;2]$ telle que $f(-2)>0$ et $f(2)<0$ et que f ne s'annule pas sur $[-2;2]$

On pourra le justifier avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Capacité 2 ***Étudier une suite du type*** $(f(u_n))$

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x)$.

1. Justifier que f est continue sur $[0;1]$.
2. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
3. On considère la suite u définie par $u_0 = 0,4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leq \frac{1}{2}$
   - **b.** En déduire que la suite u converge vers une limite ℓ.
   - **c.** Justifier que $\ell = f(\ell)$.
   - **d.** En déduire la valeur de ℓ.

1) f est dérivable donc continue sur $[0;1]$

2) Pour tout réel $x \in [0;1]$,

$$f(x) = x - x^2 \quad \text{donc} \quad f'(x) = 1 - 2x$$

x	0		$1/2$		1
$f'(x) = 1-2x$		$+$	0	$-$	
$f(x) = x(1-x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

3) a) Mise en place : Pour tout entier naturel $n \geq 0$ on définit la propriété $P(n)$: " $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ "

Initialisation : $u_1 = u_0(1-u_0) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$

On a $0 \leq u_1 \leq u_0$ donc $P(0)$ vraie

<u>Hérédité</u> : Soit un entier $p \geq 0$ tel que $P(p)$ vrai

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq \frac{1}{2}$$

Or f est croissante sur $[0 ; \frac{1}{2}]$, donc :

$$f(0) \leq f(u_{p+1}) \leq f(u_p) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

donc $\quad 0 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq \frac{1}{4}$

Or $\quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

donc $\quad 0 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq \frac{1}{4}$

donc $P(p+1)$ est vraie

<u>Conclusion</u> : la propriété $P(n)$ est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$

b) • D'une part on a pour tout entier $n \geq 0$

$0 \leq u_n$

donc la suite u est minorée par 0

• D'autre part on a pour tout entier $n \geq 0$

$u_{n+1} \leq u_n$

donc la suite u est décroissante.

• D'après le théorème de convergence monotone, la suite u converge vers une limite l.

c) (H1) La fonction f est continue sur $[0 ; 1]$

(H2) Pour tout entier $n \geq 0$, $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

donc $f(u_n)$ est définie

(1c) La suite u converge vers une limite ℓ.

D'après une propriété du cours on peut permuter f et la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell)$$

De plus pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$

donc en passant à la limite dans l'égalité :

$$\ell = f(\ell)$$

d) $\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell(1-\ell)$

$$\iff \ell = \ell - \ell^2$$

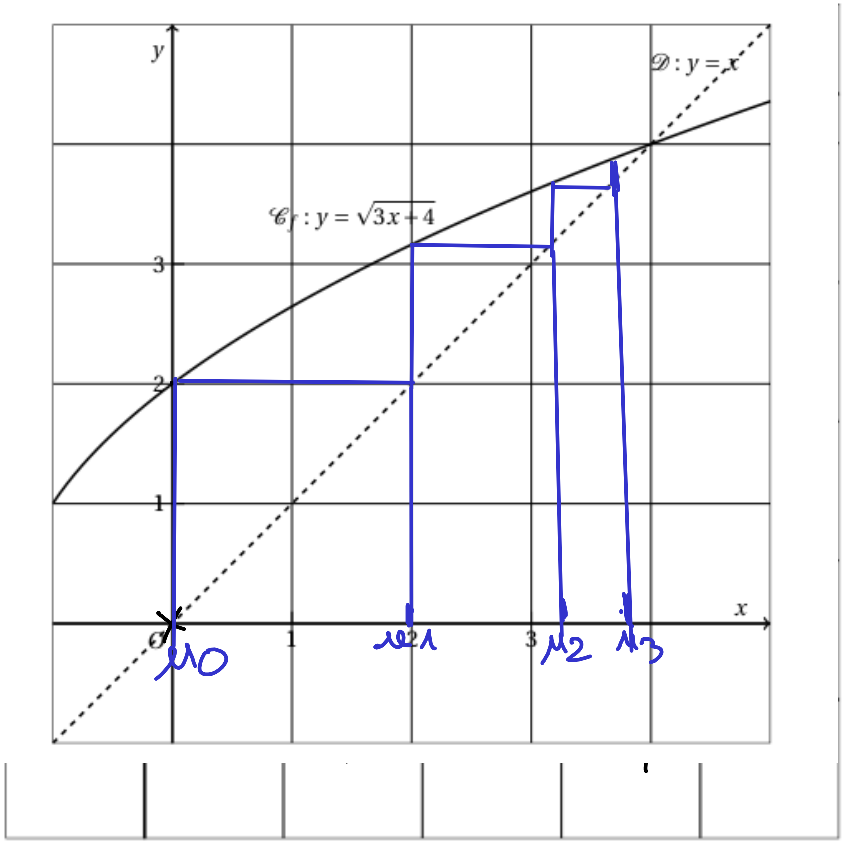
$$\iff \ell^2 = 0$$

$$\iff \ell = 0$$

On conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Capacité 3 *Étudier une suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On a représenté graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



1. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite en appliquant cet algorithme de construction :
   - **Étape 1 :** On part du point de coordonnées C_0 sur l'axe des abscisses de coordonnées $(u_0\,;0)$ et on construit le point A_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 et d'ordonnée $f(u_0) = u_1$.
   - **Étape 2 :** On construit le point B_0 sur la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée u_1 que A_0 et d'abscisse u_1.
   - **Étape 3 :** On construit le point C_1 sur l'axe des abscisses de même abscisse que B_0. Les coordonnées de C_1 sont $(u_1\,;0)$ et on commence une nouvelle itération à l'étape 1.
2. Calculer avec une machine les valeurs décimales approchées des premiers termes de (u_n) et vérifier la cohérence de la construction graphique.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer sa limite en appliquant la propriété précédente.

deg SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

n	u_n
0	0
1	2
2	3.162278
3	3.672442
4	3.87522
5	3.95293
6	3.98231
7	[illegible]

3) Graphiquement, on peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 4, abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y=x$ et de la courbe d'équation $y=f(x)$.

f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+4}$

$f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x+4$

donc f dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$:

$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

On en déduit que pour tout $x\geq 0$, on a $f'(x)>0$
donc f croissante sur $[0;+\infty[$

• Pour tout entier naturel $n\geq 0$ on définit la propriété P_n : « $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 4$ »

Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

<u>Initialisation:</u> $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

donc P_0 est vraie

<u>Hérédité:</u> Soit un entier $n \geq 0$ tel que P_n est vraie

Par hypothèse de récurrence, on a:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

donc P_{n+1} est vraie

<u>Conclusion:</u> P_n est initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 0$.

4) Pour tout entier $n \geq 0$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

. D'une part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) croissante.

. D'autre part, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq 4$ donc (u_n) majorée par 4.

D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers une limite l telle que $0 \leq l \leq 4$.

5) . $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq 4$

. Pour tout entier $n \geq 0$, on a
$u_{n+1} = f(u_n)$

. f est continue sur $[0;4]$

Donc d'après une propriété du cours, ℓ est solution sur $[0;4]$ de l'équation
$f(x) = x$.

On résout dans $[0;4]$:

$$f(x) = x \iff \begin{cases} \sqrt{3x+4} = x \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \sqrt{3x+4}^2 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4 = x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25$

$\Delta > 0$ donc deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{25}}{2} = 4$

On déduit que dans $[0;4]$:

$f(x) = x \iff x = 4$.

L'unique solution de $f(x) = x$ dans $[0;4]$ est 4

et d'après le raisonnement précédent, c'est forcément la limite l de la suite (u_n).

Capacité 4 ***Utiliser un théorème d'existence***

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[-1\,;6]$. Vérifier graphiquement avec la calculatrice.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1)

On a $f(-1) = (-1)^3 - 6\times(-1)^2 + 6 = -1$

et $f(6) = 6^3 - 6^3 + 6 = 6$

donc $f(-1) < 0 < f(6)$

- f dérivable donc continue sur $[-1\,;6]$
- 0 est une valeur intermédiaire entre $f(-1) = -1$ et $f(6) = 6$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[-1\,;6]$

2) On a : $f(0)=6$ et $f(1)=1^3-6+6=1$

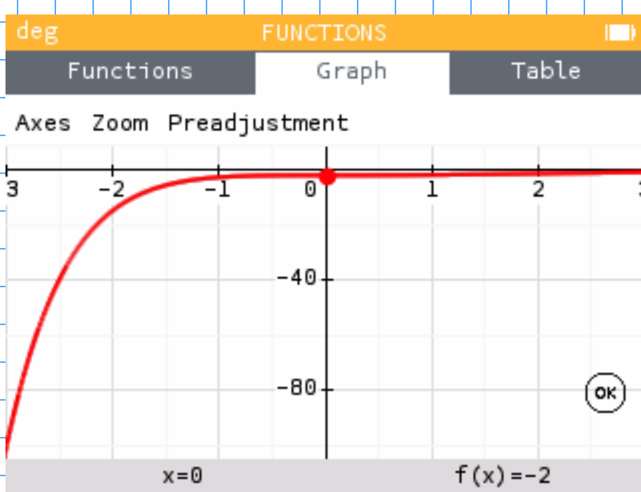
- f dérivable donc continue sur $[0;1]$
- 2 est une valeur intermédiaire entre $f(0)=6$ et $f(1)=1$

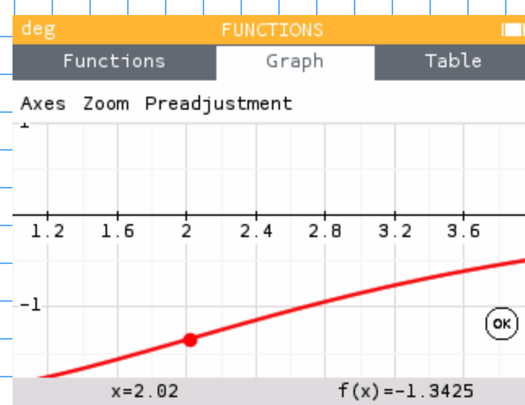
D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ possède au moins une solution dans $[0;1]$.

Capacité 5 ***Démontrer qu'une fonction est strictement monotone***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$.

1. Conjecturer graphiquement les limites aux bornes, le sens de variation, la convexité et les éventuels points d'inflexion de la fonction f.
2. Démontrer ces conjectures.





1) graphiquement, on peut conjecturer que :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$
- f est croissante sur $\mathbb{R}$
- f est concave sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$
  et convexe sur $[0;2]$
- $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion aux abscisses 0 et 2

Étudions les limites en $-\infty$ et en $+\infty$:

- Tout d'abord en $-\infty$.

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

  On pose $y = -x$, on a $\lim\limits_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$

  donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Pour tout $x < 0$, $x^2 + 2x + 2 = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

- Par produit on a donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = -\infty}$

- Ensuite en $+\infty$:

Pour tout $x > 0$: $f(x) = -\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x}$

Par croissances comparées on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Par quotient, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Par somme on a donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

. Étudions le sens de variation et la convexité de f.

f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f = -e^{u} \times v \qquad \text{avec } u(x) = -x$$
$$\text{et } v(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$f' = -(e^{u})' \times v - e^{u} \times v'$$

$$f' = -u' e^{u} \times v - e^{u} v' = -e^{u}(u'v + v')$$

donc $f'(x) = -e^{-x} \times ((-1) \times (x^2 + 2x + 2) + 2x + 2)$

$$\boxed{f'(x) = -e^{-x} \times (-x^2) = e^{-x} \times x^2}$$

Pour tout réel x, on a $e^{-x} \times x^2 \geq 0$

donc $f'(x) \geq 0$

donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On dérive encore 1 fois pour étudier la convexité

Pour tout réel x, on a : $f''(x) = -e^{-x} \times x^2 + e^{-x} \times 2x$

$$\boxed{f''(x) = e^{-x} \times x \times (2 - x)}$$

On en déduit le signe de f'' et la convexité de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$x(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Convexité de f		concave		convexe		concave	

On retrouve aussi que $\mathcal{C}_f$ admet des points d'inflexion aux abscisses 0 et 2.

Capacité 6 ***Utiliser le théorème de la bijection et encadrer une solution d'équation par balayage***

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. À l'aide du théorème de la bijection, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs du réel k.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ possède une unique solution α dans l'intervalle $]0\,;1[$ et une unique solution β dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

   b. Par balayage avec la calculatrice, démontrer que :
   - $1{,}5 < \beta < 1{,}6$
   - $1{,}51 < \beta < 1{,}52$
   - $1{,}512 < \beta < 1{,}513$

   c. On admet que la fonction ln est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
   On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 3\mathrm{e}^{-x}$.
   - Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $g'(x) = \dfrac{f(x)-3}{\mathrm{e}^x}$.
   - Déduire des questions précédentes l'étude des variations de g.

1) f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables.
Pour tout réel $x > 0$, on pose :
$u(x) = e^x$ et $v(x) = x$
donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

$$f = \frac{u}{v} \quad \text{donc} \quad f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
e^x	||	$+$		$+$	
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0^+$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

2)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3)

Valeur de k	Nombre de solutions de $f(x)=k$
$k<e$	0
$k=e$	1
$k>e$	2

4) a)

- Sur $]0;1[$:

(H1) f dérivable donc continue

(H2) 3 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = e$

(H3) f est strictement décroissante sur $]0;1[$

Donc d'après un corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution α dans $]0;1[$

- Sur $]1;+\infty[$:

(H1) f dérivable donc continue

(H2) 3 est une valeur intermédiaire entre $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

(H3) f est strictement croissante sur $]$

Donc d'après un corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution β dans $]1;+\infty[$

b) $f(1{,}5) < 3 = f(\beta) < f(1{,}6)$

et f strictement croissante sur $]1;+\infty[$

donc $1{,}5 < \beta < 1{,}6$

$$f(1{,}51) < 3 = f(\beta) < f(1{,}52)$$

et f strictement croissante sur $]1;+\infty[$

donc $1{,}51 < \beta < 1{,}52$

$$f(1{,}512) < 3 = f(\beta) < f(1{,}513)$$

et f strictement croissante sur $]1;+\infty[$

donc $1{,}512 < \beta < 1{,}513$

c) La fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 3e^{-x}$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout réel $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 3e^{-x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{e^x}$$

$$g'(x) = \frac{e^x - 3x}{x e^x} = \frac{\frac{e^x}{x} - 3}{e^x} = \frac{f(x) - 3}{e^x}$$

D'après la question 4) a) et le tableau de variation de f, on a :

x	0		α		1		β		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	e	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

donc on a :

x	0			α		1		β		$+\infty$
$f(x)-3$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$		0	$\searrow$	$e-3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Car $g'(x) = \dfrac{f(x)-3}{e^x}$ et $e^x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)-3$:

x	0		α		β		$+\infty$
$g'(x) = \dfrac{f(x)-3}{e^x}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de g :

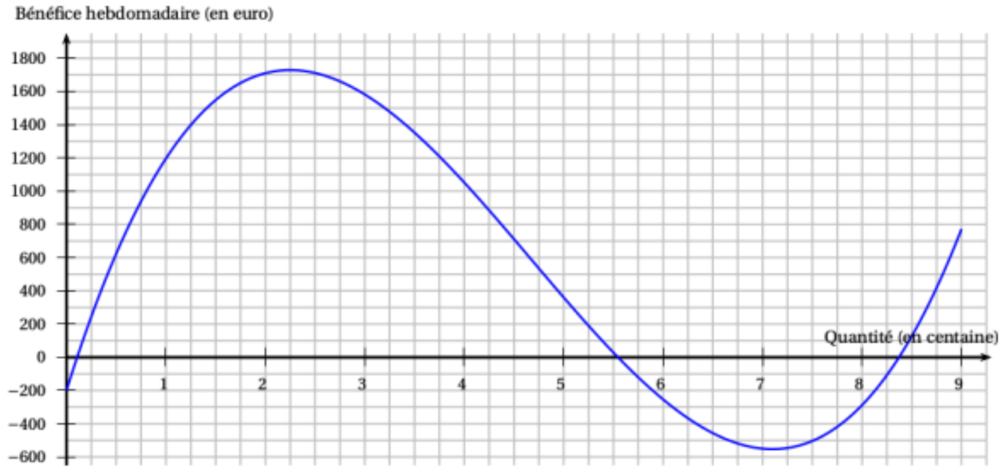
x	0		α		β		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Capacité 7 *Encadrer la solution d'une équation par dichotomie*

Une entreprise fabrique et vend des brosses à dents connectées. On modélise le bénéfice en euro pour x centaines de brosses à dents fabriquées et vendues par semaine par la fonction B définie sur $[0; 9]$ par :

$$B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1\,917x - 200$$

La courbe représentative du bénéfice hebdomadaire est donnée ci-dessous.



1. Justifier que la fonction B est dérivable sur $[0;9]$ et déterminer l'expression de $B'(x)$.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;9]$.
3. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[8; 8,5]$.
4. Déterminer graphiquement une valeur approchée de α à 25 unités près.
5. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'en sortie de boucle, l'intervalle `[u , v]` constitue un un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,02.

```
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

u = 8
v = 8.5
while v - u > 0.02:
    m = (u + v) / 2
    if B(m) >= 0:
        .... = m
    else:
        .... = m
```

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1917x - 200$ definie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

0.2.1 Question 1 : Calcul de dérivée

In [7]:
```
#expression de f(x)
fexp = 40 * t**3 - 561*t**2 + 1917 * t - 200
fexp
```

Out[7]:

$40t^3 - 561t^2 + 1917t - 200$

In [8]:
```
#expression de f'(x)
fprimexp = dérivée(fexp, t)
fprimexp
```

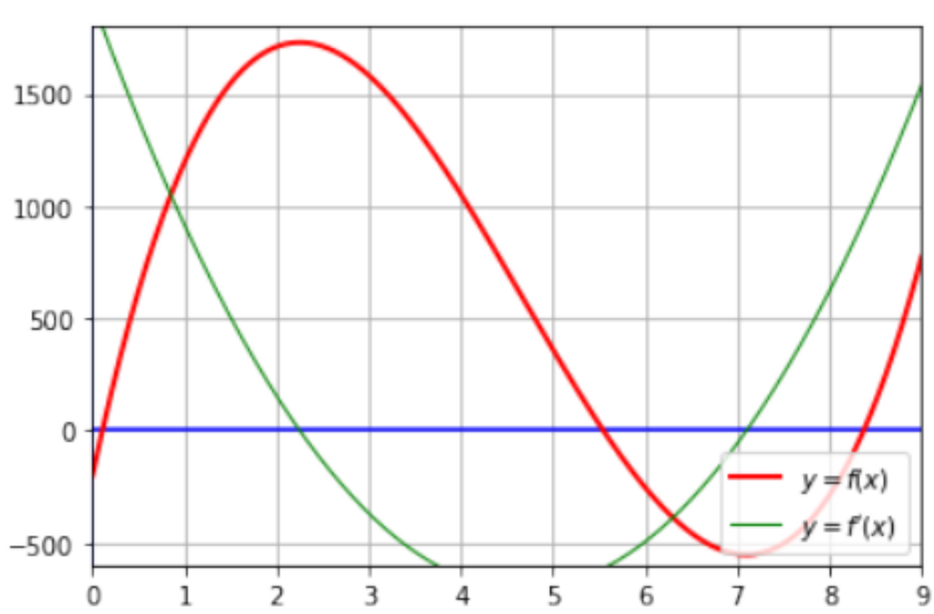

Out[8]:

$120t^2 - 1122t + 1917$

In [11]:
```
factoriser(fprimexp)
```

Out[11]:

$3(4t-9)(10t-71)$



0.2.3 Question 4 Existence de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[8;9]$

- $f : x \mapsto 40x^3 - 561x^2 + 1917x - 200$ est dérivable donc continue sur $[8;9]$
- $f(8) < 0$ et $f(9) > 0$
- f est strictement croissante sur $[8;9]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans l'intervalle $[8;9]$

```python
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

u = 8
v = 8.5
while v - u > 0.02:
    m = (u + v) / 2
    if B(m) >= 0:
        v = m
    else:
        u = m
```

0.5.1 D'abord on s'arrete lorsque l'amplitude de l'intervalle $[a, b]$ est inférieure ou égale à 0,02

```
In [29]: dicho_tab(f, 8, 9, 0.02, 0)
```

Etape	m	Choix ?	a	b
initialisation	None	None	8	9
1	8.5	gauche	8	8.5
2	8.25	droite	8.25	8.5
3	8.375	gauche	8.25	8.375
4	8.3125	droite	8.3125	8.375
5	8.34375	droite	8.34375	8.375
6	8.359375	droite	8.359375	8.375