Corrigés du chapitre loi binomiale

Capacité 1 ***Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes et calculer des probabilités***

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

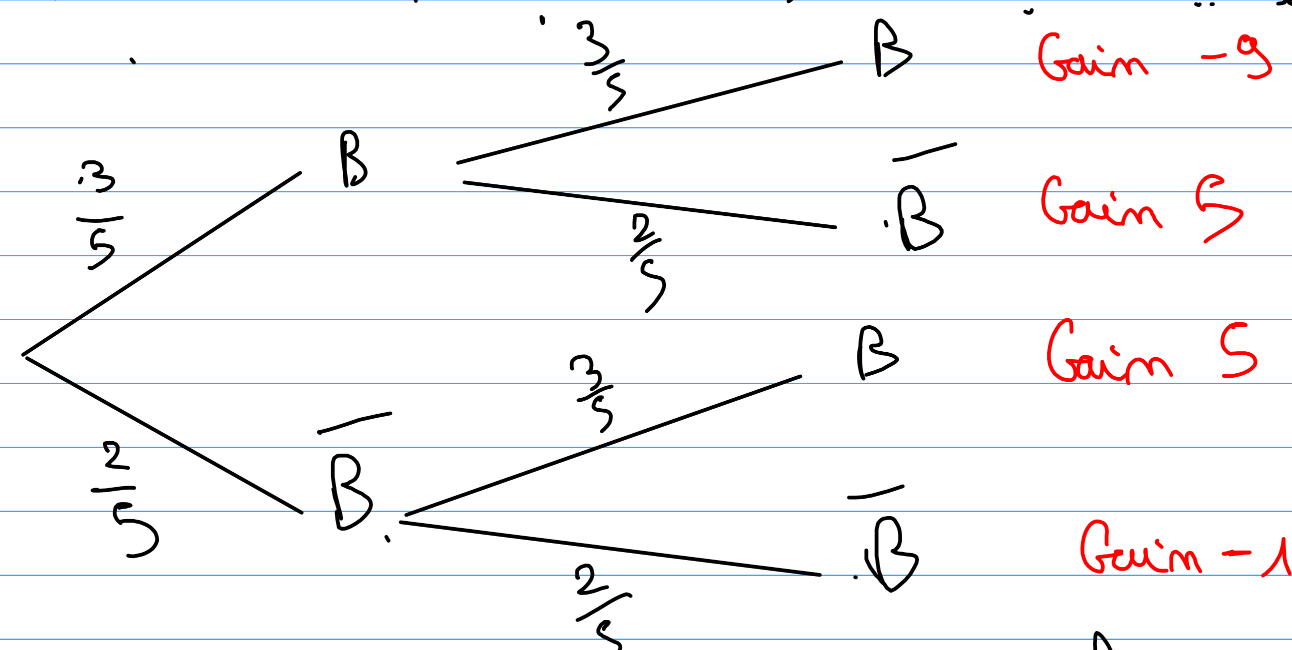
b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

1) a) On note les évènements :

B = "le jeton tiré est blanc"

$\overline{B}$ = "le jeton tiré est noir"

On modélise l'expérience par l'arbre pondéré ci-dessous.



Les probabilités sur les mêmes branches des niveaux 1 et 2 sont identiques car on a une répétition de deux expériences identiques et indépendantes.

Une issue de l'expérience des 2 tirages successifs avec remise est une des listes
(B, B) $(B, \bar{B})$ $(\bar{B}, B)$ ou $(\bar{B}, \bar{B})$

Comme les tirages successifs sont indépendants la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque tirage :

donc $P((B,B)) = P(B) \times P(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

C'est la probabilité de perdre 9 euros sur la partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

b. Résoudre l'inéquation pour x réel :

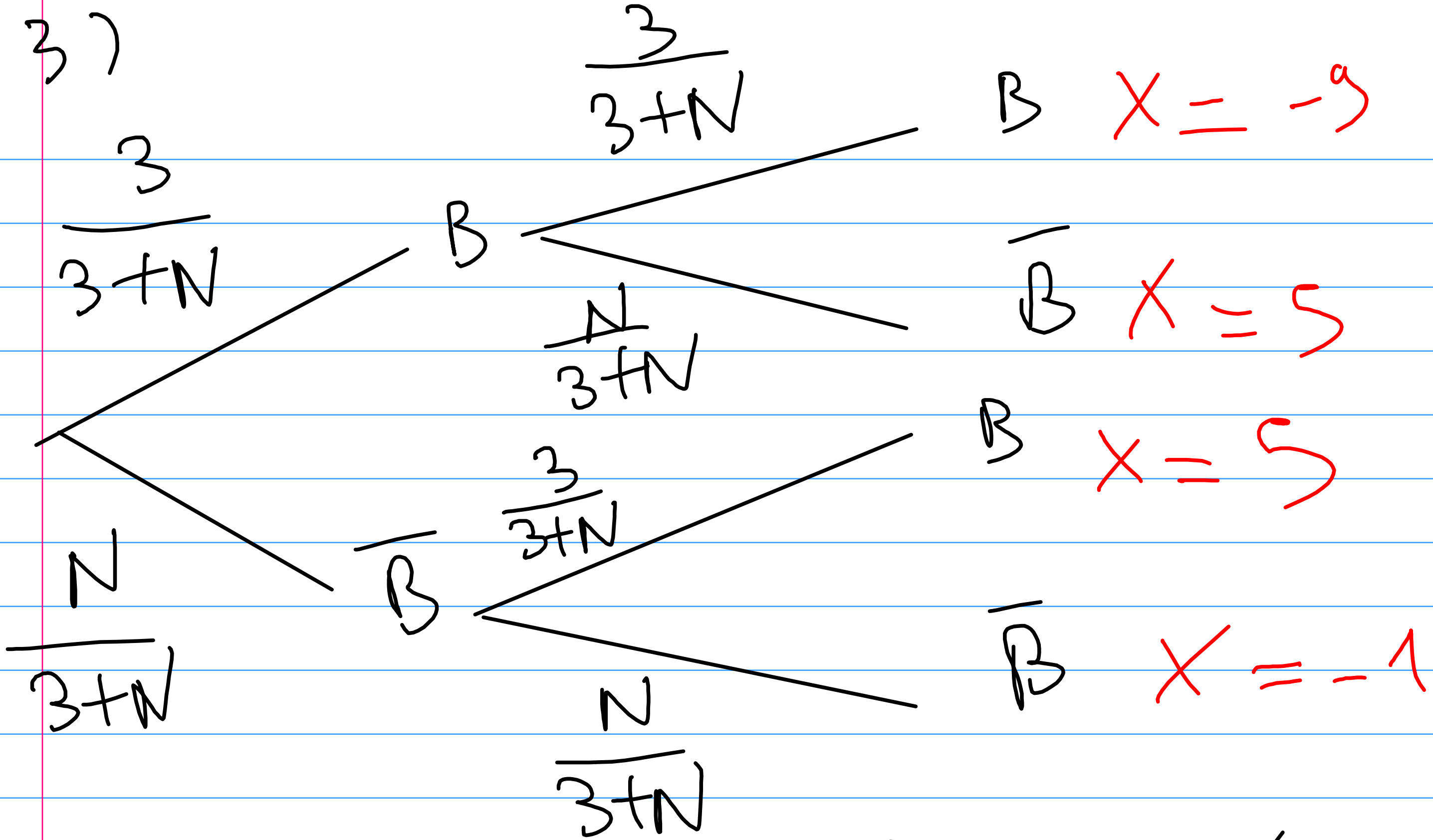
$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

2) On refait un arbre pondéré

3)



a) Loi de probabilité de X

k	-9	-1	5
$P(X=k)$	$\left(\frac{3}{3+N}\right)^2$	$\left(\frac{N}{3+N}\right)^2$	$\frac{2 \times 3N}{(3+N)^2}$

b) $-x^2 + 30x - 81 > 0$

$\underline{\Delta} = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81)$

$\Delta = 24^2$

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-30-\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)} = \frac{-54}{-2} = 27$$

$$x_2 = \frac{-30+\sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

D'après la règle du signe d'un trinôme :

x	$-\infty$		3		27		$+\infty$
$-x^2+30x-81$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		signe de a		signe de $-a$		signe de a	

c) L'espérance de X est :

$$E(X) = -9\times\frac{9}{(3+N)^2} + (-1)\times\frac{N^2}{(3+N)^2} + 5\times\frac{2\times 3N}{(3+N)^2}$$

$$E(X) = \frac{-81}{(3+N)^2} - \frac{N^2}{(3+N)^2} + \frac{30N}{(3+N)^2}$$

Le gain moyen est $E(X)$
le jeu est favorable au joueur ssi $E(X) > 0$

$$E(X) > 0 \iff \frac{-N^2+30N-81}{(3+N)^2} > 0$$

$$E(X) > 0 \iff -N^2+30N-81 > 0$$

D'après la question précédente

$-N^2+30N-81 > 0$ ssi $N \in]3;27[$

d) $E(X) = \dfrac{-N^2+30N-81}{(3+N)^2} = f(N)$

on étudie les variations f sur $]3;27[$

f dérivable comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$f'(N) = \frac{(-2N+30)(3+N)^2 - 2\times(3+N)(-N^2+30N-81)}{(3+N)^4}$$

$$f'(N) = \frac{(-2N+30)(3+N) - 2(-N^2+30N-81)}{(3+N)^3}$$

$$f'(N) = \frac{-6N - \cancel{2N^2} + 90 + 30N + \cancel{2N^2} - 60N + 162}{(3+N)^3}$$

$$f'(N) = \frac{-36N + 252}{(3+N)^3}$$

$$f'(N) = \frac{36(-N+7)}{(3+N)^3}$$

N	3		7		27
$36(-N+7)$		$+$	0	$-$	
$(3+N)^3$		$+$			$+$
$f'(N)$		$+$	0	$-$	
$f(N)$		$\nearrow$	$f(7)$	$\searrow$	

Le gain moyen maximal est donc atteint pour $N=7$ et il est alors de $\frac{-7^2+30\times 7-81}{(3+7)^2} = \frac{210-130}{100} = \frac{80}{100} = 0{,}8$

3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).

Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros?

$V =$ " Avoir au moins 1 joueur sur 10 gagnant 5 euros "

$\overline{V} =$ " N'avoir aucun joueur sur 10 qui gagne 5 euros "

Pour une partie la probabilité de gagner 5 euros est $P(X=5) = \frac{6 \times 7}{(3+7)^2} = 0,42$

et donc la probabilité de ne pas gagner 5 euros est :

$$1 - 0{,}42 = 0{,}58$$

Les 10 parties sont indépendantes donc la probabilité de ne pas gagner 5 euros 10 fois de suite est :

$$P(\overline{V}) = 0{,}58^{10}$$

donc $P(V) = 1 - P(\overline{V}) = 1 - 0{,}58^{10}$

$$P(V) \simeq 0{,}996$$

Algorithmique 1 *Simuler une variable aléatoire de Bernoulli*

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle « succès » l'apparition de la face 6.
Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face est 6 et la valeur 0

1. X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, déterminer son paramètre.

2. On rappelle que `randint(a, b)` est un entier choisi aléatoirement entre deux entiers `a` et `b` compris. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle simule la réalisation d'une réalisation de la variable aléatoire X :

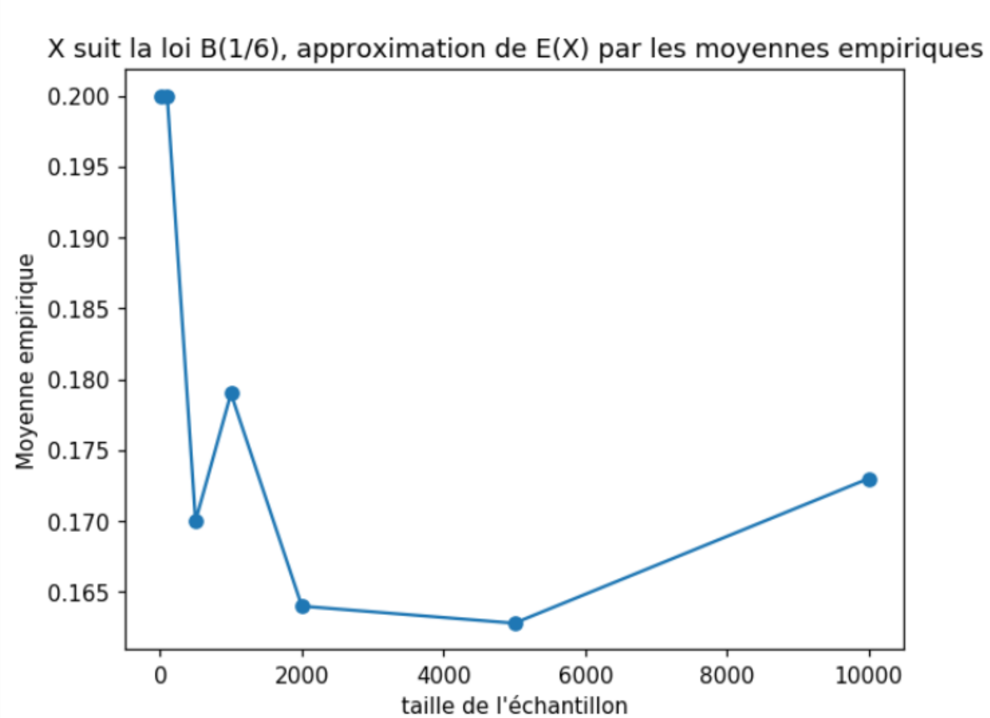
```python
from random import randint

def simulX():
    return .....
```

3. De quelle valeur devraient se rapprocher `mystere(1000)`, `mystere(10000)` et `mystere(100000)` ? Justifier.

```python
from random import randint

def mystere(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n
```

```python
# Exemples du cours Loi Binomiale

# Algorithmique 1
from random import randint

def simulX():
    if  randint(1, 6) == 6:
        return 1
    else:
        return 0

def mystere(n):
    """Approximation de l'espérance de X
    par la moyenne empirique (loi faible des grands nombres)
    """
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + simulX()
    return s / n

```

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ donc les moyennes empiriques sur un échantillon de réalisations indépendantes tendent vers $\frac{1}{6}$.



Capacité 2 ***Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli***

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, déterminer si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli et si oui, préciser ses paramètres.

1. On lance dix fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de « Face » obtenues.
2. On lance deux fois un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on compte le nombre de faces paires obtenues.
3. On tire trois fois et avec remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.
4. On tire trois fois et sans remise une boule dans une urne contenant 10 noires et 7 boules rouges et on note le nombre de boules rouges obtenues.

5. Un opérateur de télémarketing appelle 200 clients dans la journée. La probabilité qu'un client accepte l'offre commerciale est de $0,15$. Le chef de l'opérateur note le nombre de clients qui ont accepté l'offre.

1) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

2) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$

3) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{7}{17}$

4) Tirages sans remise donc ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

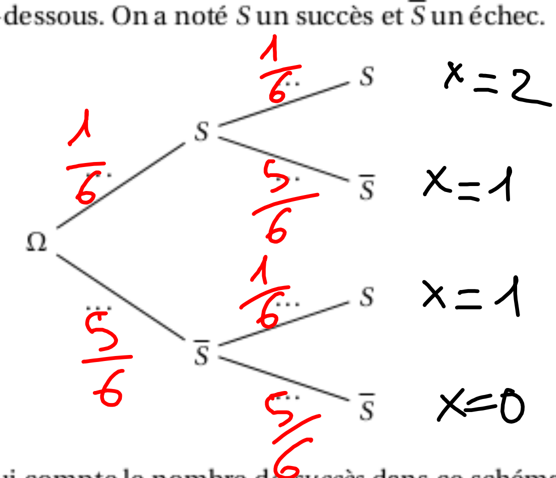
5) Schéma de Bernoulli de paramètres $n = 200$ et $p = 0,15$.

Capacité 3 *Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli*

On considère l'épreuve de Bernoulli E de paramètre $p = \frac{1}{6}$ qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à compter comme *succès* l'obtention d'un 6.

1. On répète 2 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. On a noté S un succès et $\overline{S}$ un échec.



b. Soit la variable aléatoire X_2 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.

c. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_2 ?

d. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance.

1) c) X_2 prend les valeurs 0, 1 ou 2.

d) Loi de probabilité de X_2 :

k	0	1	2
$P(X_2=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

Espérance de X : $E(X) = 0\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1\times2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} + 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$$E(X) = 2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times(5+1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Sur un échantillon de grande taille de réalisations indépendantes de X, la moyenne empirique de X doit être proche de $E(X) = \frac{1}{3}$. C'est la loi faible des grands nombres.

2. On répète 3 fois l'expérience aléatoire E de façon indépendante.

a. Représenter ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$ par un arbre pondéré en notant S un succès et $\overline{S}$ un échec.

b. Soit la variable aléatoire X_3 qui compte le nombre de *succès* dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$.

c. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?

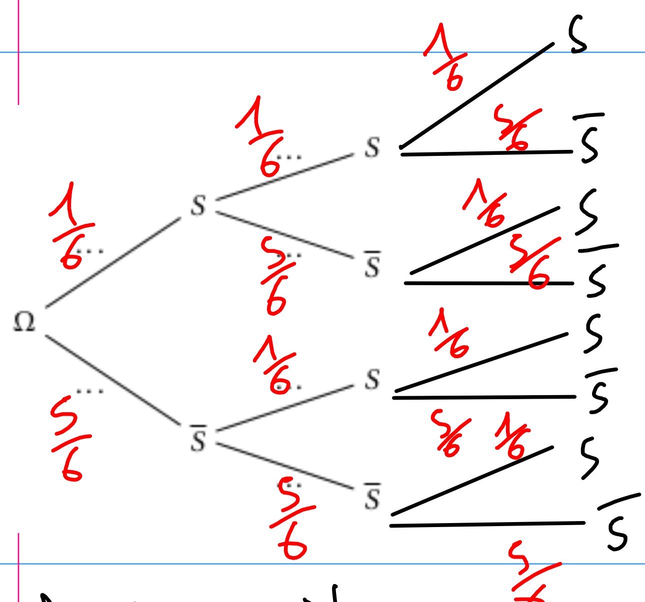
d. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0)$.

e. Combien de chemins dans l'arbre réalise 2 succès ? Exprimer ce nombre à l'aide d'un coefficient binomial et en déduire une formule de calcul de $\mathbb{P}(X_3 = 2)$.

f. Exprimer de même $\mathbb{P}(X_3 = 1)$.

g. Dresser un tableau de la loi de probabilité de X_3 et déterminer son espérance.

a)



b) On a une répétition de $n=3$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{6}$.

X_3, qui compte le nombre de succès dans ce schéma, suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{6}$.

c) X_3 prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

d) $P(X_3=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

$P(X_3=1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

e) Le nombre chemins réalisant 2 succès parmi 3 épreuves est le nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 3, c'est-à-dire.

$\binom{3}{2} = 3$

Chaque chemin réalisant 2 succès a une probabilité de $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$ donc:

$$P(X_3=2) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{nombre de chemins}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}}_{\text{probabilité d'un chemin}}$$

donc $P(X_3=2) = 3 \times \frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6} = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$

f) De même on a :

$$P(X_3=1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{5^2}{6^3} = \frac{5^2}{72} = \frac{25}{72}$$

g)

k	0	1	2	3
$P(X_3=k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

On vérifie que :
$P(X_3=0) + P(X_3=1) + P(X_3=2) + P(X_3=3) = 1$

me X_n.

```python
from random import randint

def simulX(n):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        if randint(1, 6) == 6 :
            nbsucces = nbsucces + 1
    return nbsucces
```

```python
## Question 4

from random import random
from math import floor

def bernoulli_truque(p):
    return floor(p + random())

def simulY(n, p):
    nbsucces = 0
    for k in range(n):
        nbsucces = nbsucces + bernoulli_truque(p)
    return nbsucces
```

On a $0 \leq \text{random}() < 1$

$\iff p \leq p + \text{random}() < 1 + p$

$\text{floor}(p + \text{random}()) == 0$ ssi $p \leq p + \text{random}() < 1$

ssi $0 \leq \text{random} < 1 - p$

Or random suit une loi uniforme sur $[0;1[$

donc $P(0 \leq \text{random}() < 1-p) = 1-p$

et donc $P(\text{floor}(\text{random}()+p)==0) = 1-p$

et $P(\text{floor}(\text{random}()+p)==1) = 1-(1-p) = p$

Capacité 4 ***Reconnaître un schéma de Bernoulli et une loi binomiale***

Déterminer dans chaque cas si on peut modéliser la situation par un schéma de Bernoulli et une loi binomiale et si oui déterminer leurs paramètres.

1. Situation 1 On s'intéresse à la variable aléatoire W qui compte le nombre d'ampoules avec défaut dans un échantillon de 10 ampoules choisies au hasard parmi la production d'une journée à la sortie d'une machine dont la probabilité de fabrication d'une ampoule sans défaut est égale à 0,9305. La taille du stock permet d'assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise.
2. Situation 2 On s'intéresse à la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire simultanément trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
3. Situation 3 On s'intéresse à la variable aléatoire Y qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement avec remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.
4. Situation 4 On s'intéresse à la variable aléatoire Z qui compte le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire successivement sans remise trois boules dans une urne contenant 60 boules rouges et 40 boules blanches.

1) Situation 1 : W suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 1 - 0,9305 = 0,0695$.
Un succès est "Tirer une ampoule défectueuse"

2) Tirage simultané $\neq$ tirage avec remise.
Les épreuves de Bernoulli successives ne sont donc ni indépendantes ni identiques donc X ne suit pas une loi binomiale.

3) On a un schéma constitué de la répéti-tion de $n = 3$ épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès "obtenir une boule rouge" est $p = \frac{6}{10}$ et qui sont identiques et indépen-dantes (tirages avec remise)

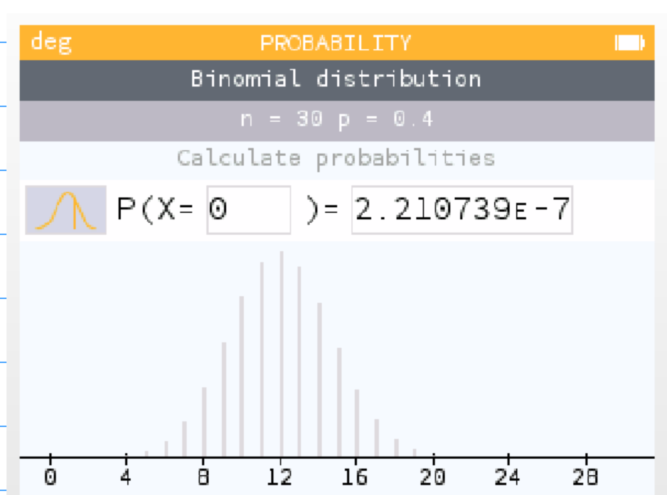
Y suit donc une loi binomiale de paramè-tres $n = 3$ et $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

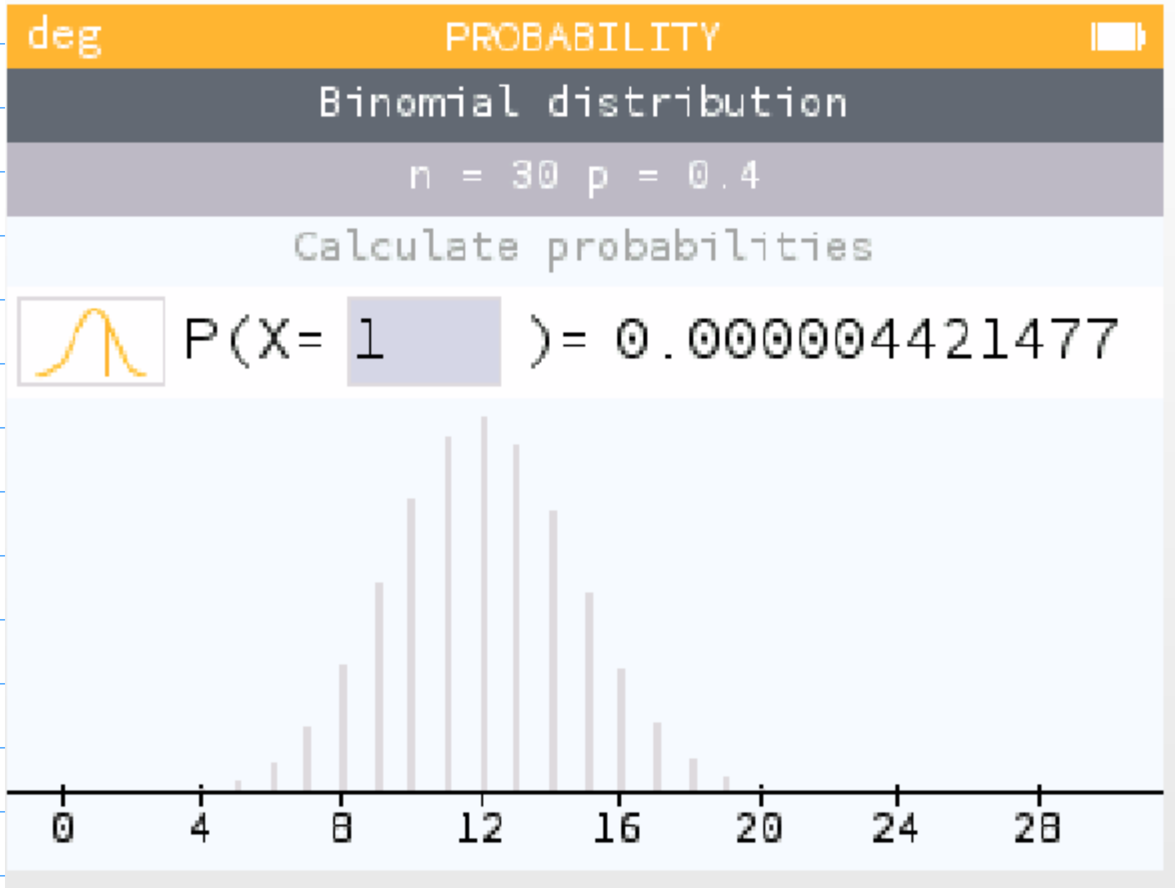
4) les tirages successifs sont sans remise donc ce n'est pas un schéma de Bernoulli et Z ne suit pas une loi binomiale.

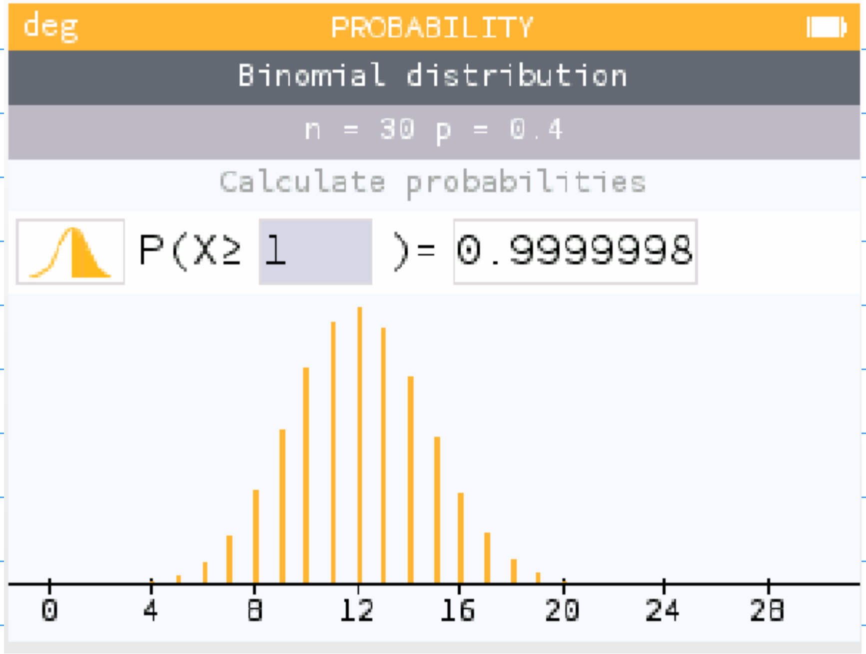
Capacité 5 ***Calculer des probabilités avec une loi binomiale***

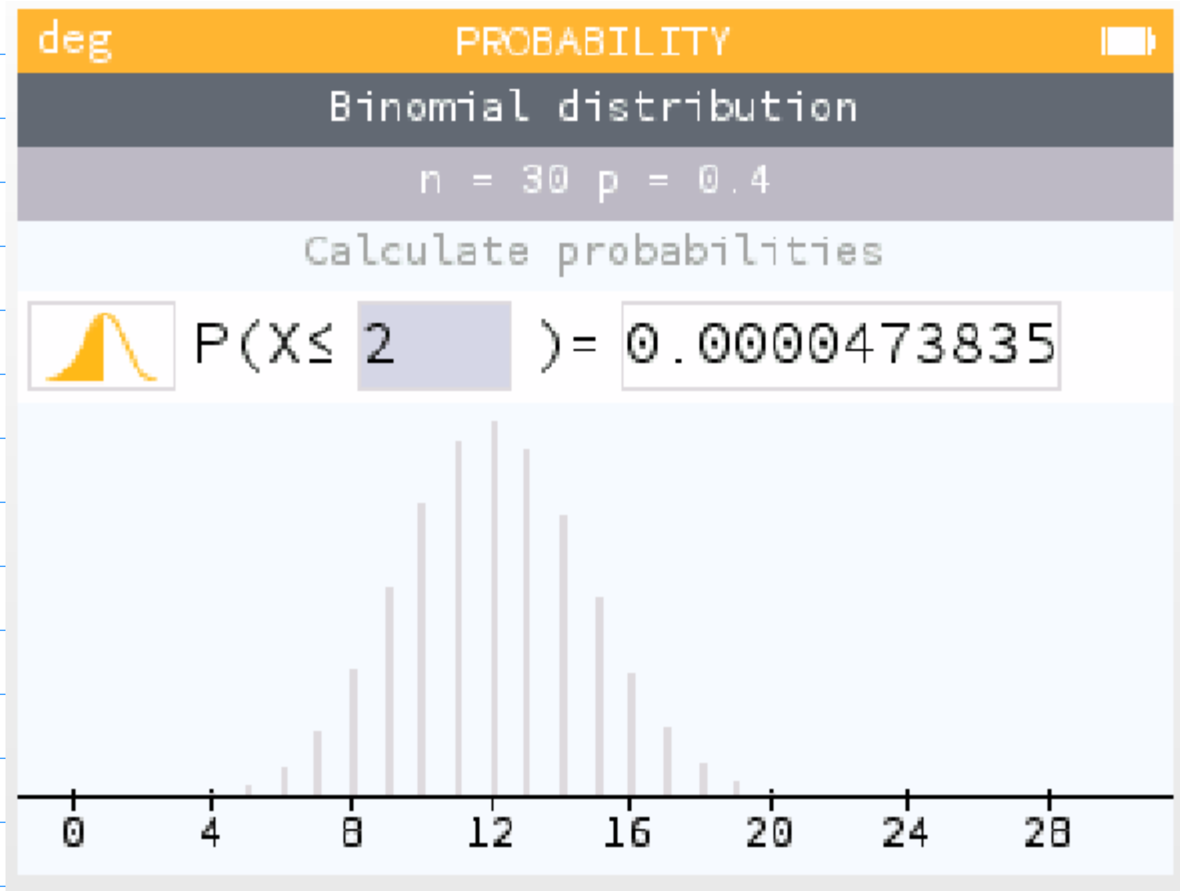
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,4$.

1. Calculer les valeurs exactes des probabilités $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.
2. Calculer les valeurs exactes des probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 29)$ puis comparer avec les valeurs approchées obtenues avec les fonctions préprogrammées `binomcdf` de la calculatrice.

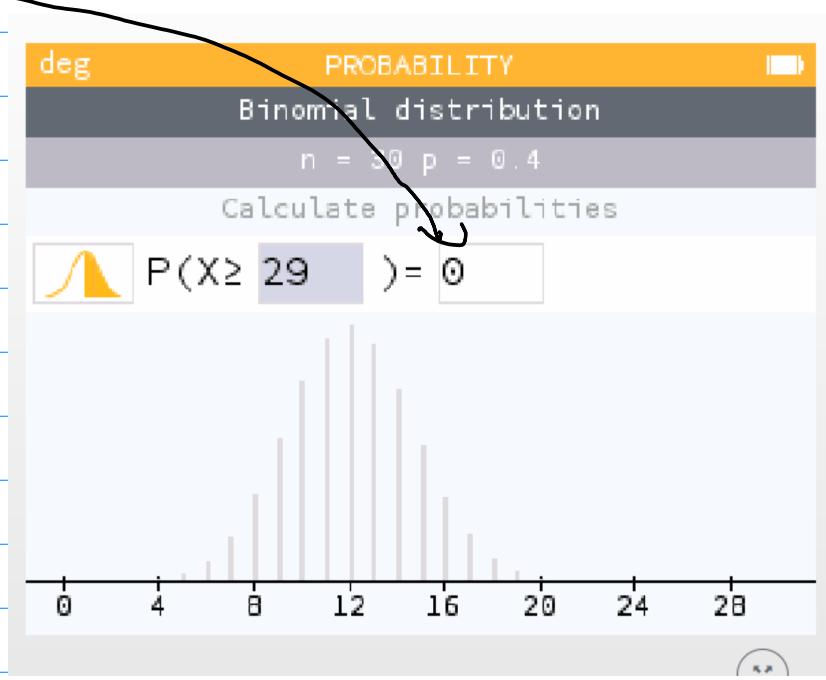



deg
PROBABILITY
Binomial distribution
n = 30 p = 0.4
Calculate probabilities
P(X= 1)= 0.000004421477
0
4
8
12
16
20
24
28


deg
PROBABILITY
Binomial distribution
n = 30 p = 0.4
Calculate probabilities
P(X≥ 1)= 0.9999998
0
4
8
12
16
20
24
28



$$P(X \geq 29) = P(X=29) + P(X=30) = \binom{30}{29} 0{,}4^{29} \times 0{,}6^{1} + \binom{30}{30} 0{,}4^{30}$$



$$P(X \geq 29) = 30 \times 0{,}4^{29} \times 0{,}6 + 0{,}4^{30}$$

Algorithmique 2

1. Compléter les fonctions Python ci-dessous pour qu'elles répondent aux spécifications fixées en commentaire.

```
def factorielle(n):
    # Retourne n!
    f = 1
    for k in range(1, n + 1):
        f = .......
```



```
    return f

def binom(n, k):
    # Retourne le coefficient binomial k parmi n
    return factorielle(n) // (factorielle(n - k) * factorielle(k))

def binompdf(n, p, k):
    # Retourne P(X=k) pour une va X de loi binomiale B(n,p)
    return .............................

def binomcdf(n, p, k):
    # Retourne P(X <= k) pour une va X de loi binomiale B(n,p)
    proba_cumul = 0
    for i in range(0, k + 1):
        proba_cumul = ................
    return proba_cumul
```

```python
def factorielle(n):
    # Retourne n!
    f = 1
    for k in range(1, n + 1):
        f = f * k
    return f

def binom(n, k):
    # Retourne le coefficient binomial k parmi n
    return factorielle(n) // (factorielle(n - k) * factorielle(k))

def binompdf(n, p, k):
    # Retourne P(X=k) pour une va X de loi binomiale B(n,p)
    return binom(n, k) * p ** k * (1 - p) ** (n - k)

def binomcdf(n, p, k):
    # Retourne P(X <= k) pour une va X de loi binomiale B(n,p)
    proba_cumul = 0
    for i in range(0, k + 1):
        proba_cumul = proba_cumul + binompdf(n, p, i)
    return proba_cumul
```

2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

Exprimer les probabilités ci-dessous à l'aide des fonctions `Python` définies précédemment puis calculer des valeurs approchées avec les fonctions préprogrammées de la calculatrice.

a. $\mathbb{P}(X = 3)$

b. $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

c. $\mathbb{P}(X \leqslant 4)$

d. $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$

e. $\mathbb{P}(4 \leqslant X \leqslant 8)$

f. $\mathbb{P}((X \leqslant 4) \cup (8 \leqslant X))$

```
>>> binompdf(10, 0.3, 3)
0.2668279319999998
>>> binomcdf(10, 0.3, 3)
0.6496107183999996
```

```
>>> binomcdf(10, 0.3, 4)
0.8497316673999995
>>> 1 - binomcdf(10, 0.3, 3)
0.3503892816000004
>>> binomcdf(10, 0.3, 8) - binomcdf(10, 0.3, 3)
0.3502455956999997
```

```
>>> binomcdf(10, 0.3, 4) + 1 - binomcdf(10, 0.3, 7)
0.8513220538000001
>>>
```

Capacité 6 ***Reconnaître et utiliser une loi binomiale***

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire *simultanément* 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire.

2. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire *successivement avec remise* 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire.

1) Tirages simultanés et non pas avec remise donc on ne peut pas calculer la probabilité avec une loi binomiale.
Par principe additif on a $\binom{7}{2}\times\binom{3}{1}$ façons de tirer 2 blanches et 1 noire.
On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité cherchée est :

$$\frac{\binom{7}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}$$

2) Tirages successifs avec remise donc schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p=\frac{3}{10}$ si on appelle succès "Tirer une noire"

Soit Y la variable aléatoire comptant le nombres de boules noires tirées sur un tirage de 3 boules :
La probabilité cherchée est $P(Y=1)=\binom{3}{1}\times\left(\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

Capacité 7 *Modéliser par une loi binomiale*

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

   a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.

   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

1)a) Par principe multiplicatif, sachant qu'on a cinq questions avec 3 réponses chacunes, on a :

3^5 réponses possibles

b) On a un schéma constitué de $n = 5$ épreuves de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses.

$P(E) = P(X=1) = \binom{5}{1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{5}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$P(F) = P(Y=0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

G = "Le mot réponse est un palindrome" est réalisé par 3^3 issues sur 3^5 possibles donc $p(G) = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^{5-3}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

En effet un palindrome est totalement déterminé par ses trois premiers caractères.

2) a) Pour chaque élève la probabilité de n'avoir aucune bonne réponse est :

$$P(Y=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

Le nombre d'élève avec aucune bonne réponse est le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$ donc suit la loi binomiale $B\left(28 ; \frac{32}{243}\right)$.

b) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$P(X \leq 1) = \binom{28}{0}\left(\frac{32}{243}\right)^0 \times \left(\frac{211}{243}\right)^{28}$$

$$+ \binom{28}{1} \times \left(\frac{32}{243}\right)^1 \times \left(\frac{211}{243}\right)^{27}$$

$$P(X \leq 1) = \left(\frac{211}{243}\right)^{28} + 28 \times \frac{32}{243} \times \left(\frac{211}{243}\right)^{27}$$

Capacité 8 ***Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil***

Un test de dépistage d'une maladie a été mis au point. Si l'individu est malade, dans 94% des cas le test est positif. Pour un individu choisi au hasard dans cette population, la probabilité que le test soit positif vaut 0,158. De plus la répartition de malades dans la population est de 15 %

1. On teste un individu choisi au hasard dans la population : le test est positif. Déterminer une valeur arrondie au centième de la probabilité que la personne soit malade.

2. On prélève un échantillon aléatoire dans la population, et on fait passer le test aux individus de cet échantillon. Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement, soit supérieure ou égale à 0,99.

1) Soit les évènements :

P : "Test positif"

M : "Individu malade"

On veut calculer la probabilité conditionnelle

$$P_P(M) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{P(M \cap P)}{0,158}$$

Par ailleurs $P(M \cap P) = P(M) \times P_M(P)$

$$P(M \cap P) = P(M) \times 0,94$$

On a donc $P_P(M) = \dfrac{0,94}{0,158} \times P(M)$

$$P_P(M) = \frac{0,94}{0,158} \times 0,15 \approx 0,892$$

2) On considère le schéma de Bernoulli, constitué de n individus testés de façon indépendante avec une probabilité de succès (test positif) de $p = 0{,}158$.

La variable aléatoire X_n comptant le nombre de ~~tests~~ tests positifs sur un échantillon de taille n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}158$.

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0)$$

$$P(X_n \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

$$P(X_n \geq 1) \geq 0{,}99 \iff 1 - (1-p)^n \geq 0{,}99$$

$$\iff 0{,}01 \geq (1-p)^n$$

$$\iff 0{,}01 \geq (1-0{,}158)^n$$

$$\iff 0{,}01 \geq 0{,}842^n$$

On peut déterminer le plus petit entier n solution de cette inéquation avec un algorithme de seuil :

```
def seuil():
    p = 1
    n = 0
    while p > 0.01:
        p = p * 0.842
        n = n + 1
    return n
```

```
>>> seuil()
27
```

Capacité 9 ***Déterminer un seuil s pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(X > s)$ est inférieure à une valeur donnée α***

Une roseraie livre des fleuristes par lots de 100 roses.
Afin de fidéliser ses clients, elle rembourse un lot lorsqu'il contient strictement plus de 5 roses fanées.
Une étude statistique a montré que 4% des roses livrées sont fanées.
On choisit un lot au hasard et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de roses fanées de ce lot.

1. **a.** Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

   b. Calculer la probabilité que le lot soit remboursé au fleuriste. Arrondir au centième.

2. La roseraie souhaite réduire le nombre de lots remboursés. Pour cela elle décide d'augmenter le nombre k de roses fanées à partir duquel le lot est remboursé. On veut déterminer le seuil s pour lequel la probabilité de rembourser le lot soit inférieure ou égale à $0,01$.

   a. Quelle inégalité est vérifiée par $\mathbb{P}(X \leqslant s)$?

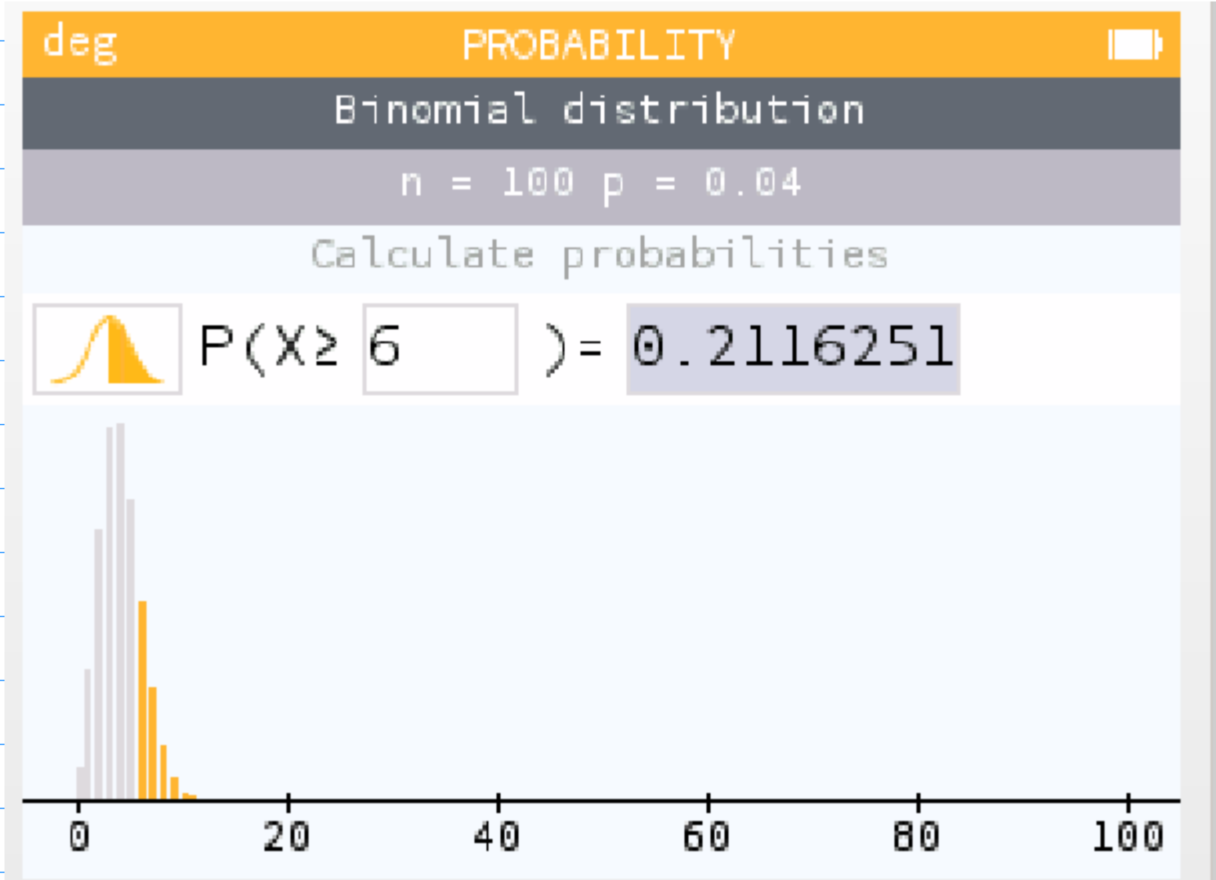
   b. Compléter les fonctions `Python` ci-dessous pour que `seuil()` ait la valeur s recherchée.

`comb(n, k)` est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec n et k entiers naturels tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

```
from math import comb

def binompdf(n, p, k):
    #retourne P(X=k) pour X suivant la loi binomiale B(n, p)
    return .........................

def seuil():
    k = 0
    probacum = binompdf(100, 0.04, 0)
    while probacum < 0.99:
        k = k + 1
        probacum = .................
    return k
```

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,04$

b) On calcule $P(X>5)=P(X\geqslant 6)$



2) a) $P(X > s) \leq 0{,}01 \iff 1 - P(X \leq s) \leq 0{,}01$

$\iff 0{,}99 \leq P(X \leq s)$

```
from math import comb


def binompdf(n, p, k):
        #retourne P(X=k) pour X suivant la loi binomiale B(n, p)
    return comb(n, k) * p ** k * (1 - p) ** (n - k)

def seuil_capacite9():
    k = 0
    probacum = binompdf(100, 0.04, 0)
    while probacum < 0.99:
        k = k + 1
        probacum = probacum + binompdf(100, 0.04, k)
    return k
```

型 seuil_capacite9()
9

Capacité 10 ***Déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité*** $\mathbb{P}(X \in I)$ ***est inférieure à une valeur donnée*** α ***ou supérieure à*** $1-\alpha$

Une étude statistique a permis d'établir que 6% des DVD proposés à l'emprunt dans les médiathèques d'une ville sont défectueux.
Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de DVD défectueux sur cet échantillon.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

1) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,06$

2. On admet qu'on dispose de la fonction `binompdf(n,p,k)` définie dans la capacité 9 qui retourne $\mathbb{P}(X = k)$ si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

a. Compléter la fonction `borne_inf` ci-dessous pour que `borne_inf()` représente le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0{,}025$.

```
def borne_inf():
    a = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ...... 0.025:
        a = a + 1
        probacum = .................
    return a
```

b. Compléter la fonction `borne_sup` ci-dessous pour que `borne_sup()` représente le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

```
def borne_sup():
    b = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ...... 0.975:
        b = b + 1
```



```
        probacum = .................
    return b
```

c. Déterminer les valeurs de a et b en faisant un tableau de valeurs des probabilités cumulées $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ (voir p. 373 du manuel Indice). En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0{,}95$.

```
# Capacité 10

def borne_inf():
    a = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum  <= 0.025:
        a = a + 1
        probacum = probacum  + binompdf(150, 0.06, a)
    return a


def borne_sup():
  b = 0
  probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
  while probacum  < 0.975:
      b = b + 1
      probacum = probacum  + binompdf(150, 0.06, b)
  return b
```

```
型 borne_inf()
4
型 borne_sup()
15
```

c. Déterminer les valeurs de a et b en faisant un tableau de valeurs des probabilités cumulées $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ (voir p. 373 du manuel Indice). En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0{,}95$.

d. On veut tester l'hypothèse que la proportion de DVD défectueux dans la médiathèque est de $p = 0{,}06$. Après avoir déterminé l'intervalle de fluctuation J au seuil de 95% de la fréquence de DVD défectueux sur un échantillon quelconque de taille 150 et mesuré la fréquence f de DVD défectueux sur l'échantillon prélevé, on applique cette règle de décision :

- si $f \in$ I, on ~~rejette~~ accepte l'hypothèse que $p = 0{,}06$;
- sinon on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.

Sur l'échantillon, on détecte 14 DVD défectueux. Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux?

c) D'après l'exécution des fonctions borne_inf() et borne_sup(), on a :
$a = 4$ et $b = 15$

$I = [4\,;15]$ tel que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$

car $P(X \notin I) = P(X \leqslant a) + P(X > b)$
avec $P(X < a) \leq 0{,}025$ et $P(X > b) \leq 0{,}025$

donc $P(X \notin I) \leq 0{,}05$

d) $f = \frac{14}{150}$ est la fréquence de DVD défectueux mesurée sur l'échantillon.
L'intervalle de fluctuation des fréquences mesurées sur l'échantillon au seuil de 95% est :

$$J = \left[\frac{4}{150}\,;\frac{15}{150}\right]$$

$f \in I$ donc on accepte l'hypothèse que 5 % des DVD sont défectueux.