Histoire 1

Dans les premières années du XVII$^{\text{ième}}$ siècle, John Neper (1550-1617) invente le logarithme (du grec *logos* logique et *arithmos* nombre) en faisant correspondre les termes d'une suite géométrique à ceux d'une suite arithmétique : les multiplications sont ainsi transformées en addition. Il construit avec Henry Briggs (1561-1630) des tables de logarithme qui facilitent les multiplications de grands nombres, utiles en astronomie. Pour multiplier deux nombres A et B, on additionne leurs logarithmes log(A) et log(B) et on lit dans une table *l'antélogarithme* (en fait l'exponentielle) de cette somme : il s'agit du produit A×B. Cette méthode est utilisée dans les les règles à calculs des lycéens jusque dans les années 1970 avant la démocratisation des calculatrices électroniques.

1 Fonction logarithme népérien

1.1 Définition

Théorème-Définition 1

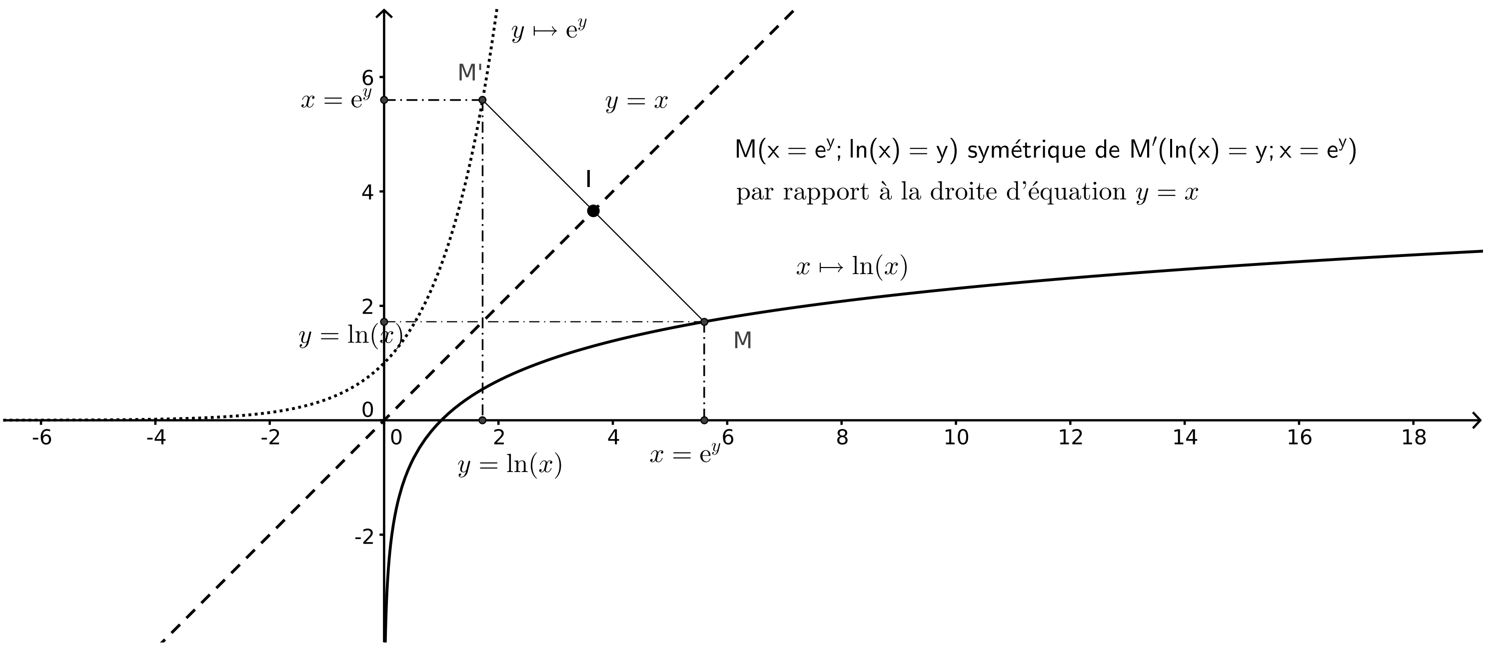
Pour tout réel $x > 0$ il existe un unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$, ce réel est le logarithme népérien de x noté $y = \ln x$.
On définit ainsi sur $]0\,;+\infty[$ la fonction logarithme népérien $\ln : x \mapsto \ln(x)$, c'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle .

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \ln(x) = y \iff x = \mathrm{e}^y$$

ne pas confondre les touches $\boxed{\text{Ln}}$ et $\boxed{\text{Log}}$ (qui correspond au *logarithme décimal*, pour tout $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$).

Démonstration

La fonction $\exp : y \mapsto \mathrm{e}^y$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel strictement positif x, l'équation $\mathrm{e}^y = x$ a une unique solution que l'on note : $y = \ln(x)$ ou $y = \ln(x)$.



Capacité 1 *Utiliser la fonction logarithme dans un contexte*

La magnitude d'un séisme d'amplitude maximale A est mesurée *l'échelle de Richter* par $\mathrm{M} = \dfrac{\ln\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_0}\right)}{\ln(10)}$ où A_0 est une amplitude de référence. Cette formule s'écrit souvent $\mathrm{M} = \log\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_0}\right)$ où $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ est la fonction logarithme décimal (touche Log de la calculatrice).

1. Déterminer avec la calculatrice la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :
   - **a.** Un séisme d'amplitude A_0 puis un séisme d'amplitude $10\mathrm{A}_0$.
   - **b.** Un séisme d'amplitude $10^2\mathrm{A}_0$, puis d'amplitude $10^3\mathrm{A}_0$ et enfin d'amplitude $10^4\mathrm{A}_0$. Quelle conjecture peut-on formuler ?
2. Exprimer en fonction de A_0 l'amplitude maximale du séisme d'Amatrice (Italie 2016) dont la magnitude était de $6{,}2$ sur l'échelle de Richter.
3. *L'échelle de Richter* est une **échelle logarithmique**, la valeur représentée sur l'échelle est le logarithme (népérien ou décimal) de la grandeur mesurée. D'autres exemples d'échelles logarithmiques sont présentés aux exercices 92 p. 148 (magnitude d'un astre) et 173 p. 256 (intensité sonore en décibels). Quel est l'intérêt d'une échelle logarithmique par rapport à une échelle linéaire ?

Corollaire ln *fonction réciproque de* exp

1. Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
3. En particulier, on a $\ln(\mathrm{e}) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
4. Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

On applique la définition du logarithme fonction réciproque de la fonction exponentielle :

....

1. Pour tout réel x avec x argument de la fonction exponentielle :

$$e^x = e^x \underset{\text{définition de ln}}{\iff} \ln(e^x) = x$$

2. ln définie sur $]0\,;\,+\infty[$ d'où la contrainte sur x.

   Pour tout réel $x > 0$ avec x argument de la fonction ln :

$$x \underset{\text{définition de ln}}{=} e^{\ln(x)}$$

3. On applique la définition de ln dans deux cas particuliers :

$$e = e^1 \underset{\text{définition de ln}}{\iff} \ln(e) = 1$$
$$1 = e^0 \underset{\text{définition de ln}}{\iff} \ln(1) = 0$$

Capacité 2 ***Utiliser la définition de la fonction logarithme***

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

   a. $f : x \mapsto \ln(1-3x)$

   b. $g : x \mapsto \ln(x^2)$

   c. $h : x \mapsto \ln(\ln(x))$

   d. $k : x \mapsto \ln(1-\ln(x))$

2. Compléter les pointillés :

   a. $e^{\ln(3)} = \cdots$

   b. $\ln(e^0) = \cdots$

   c. $\ln(e^{-7}) = \cdots$

   d. $\ln(e^2) + \ln(e^3) = \cdots$

   e. $\ln(e^2 \times e^3) = \cdots$

   f. $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \cdots$

1.2 Dérivée et sens de variation

Propriété 1

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Démonstration *Au programme, voir page 236*

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, déterminons une expression de sa fonction dérivée.
Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x)=\ln(x)$ et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=\mathrm{e}^x$.

- On décompose la fonction composée $g = v \circ u$.

$$g = v\circ u$$

$$x > 0 \rightarrow u(x) = \ln(x) \rightarrow \mathrm{e}^{u(x)}$$

$$\mathrm{X} \xrightarrow{v} \mathrm{e}^X$$

- u est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, la fonction composée $g = v\circ u$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

  Pour tout réel $x>0$, on a :

$$g'(x) = u'(x)\times v'(u(x))$$

  Or $v'(X)=\mathrm{e}^X$ donc

$$g'(x) = u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)} = \ln'(x)\mathrm{e}^{\ln(x)} = \ldots$$

  De plus $g(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ donc $g'(x)=1$, on en déduit que

$$\ln'(x) = \ldots$$

Corollaire

1. La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Pour tous réels a et b strictement positifs :
   - $\ln(a)=\ln(b) \Longleftrightarrow a=b$
   - $\ln(a)>\ln(b) \Longleftrightarrow a>b$
3. Pour tout réel x strictement positif et tout réel k :
   - $\ln(x)>k \Longleftrightarrow \ln(x)>\ln\left(e^k\right) \Longleftrightarrow x>e^k$
   - $\ln(x)<k \Longleftrightarrow \ln(x)<\ln\left(e^k\right) \Longleftrightarrow 0<x<e^k$
4. La fonction ln est négative sur $]0\,;\,1[$ et positive sur $]1\,;\,+\infty[$:
   - $\ln(x)>0 \Longleftrightarrow x>1$
   - $\ln(x)<0 \Longleftrightarrow 0<x<1$

Démonstration

1. Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $\ln'(x) > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tous réels a et b strictement positifs on a :

   - $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
   - $\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$

3. Pour tout réel k, on a $k = \ln\left(\mathrm{e}^k\right)$ donc on peut appliquer la propriété précédente avec $a = x > 0$ et $b = \mathrm{e}^k$:

$$\ln(x) > \ln\left(\mathrm{e}^k\right) \iff x > \mathrm{e}^k$$

4. D'une part, la fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   D'autre part $\mathrm{e}^0 = 1 \iff \ln(1) = 0$.

   On en déduit le tableau de variations de la fonction ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	‖ ↗	0	↗

   On en déduit le tableau de signes de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Capacité 3 *Utiliser les propriétés de la fonction logarithme*

On considère la fonction $g : x \mapsto x\ln(x) - x$ définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

1. Démontrer que g est une primitive de la fonction ln.
2. Déterminer les variations de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer le signe de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.

1.3 Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode

- Pour tout réel k, et tout réel x tel que $u(x) > 0$:
  $\ln(u(x)) = k \iff u(x) = \mathrm{e}^k$ et $\ln(u(x)) > k \iff u(x) > \mathrm{e}^k$ et $\ln(u(x)) < k \iff 0 < u(x) < \mathrm{e}^k$
- Résolution de $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$:
  - On détermine l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$

– On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x) = v(x)$ ou l'inéquation $u(x) < v(x)$

– On ne garde que les solutions qui sont dans $\mathscr{D}$.

- Résolution de $a\,(\ln(x))^2 + b\ln(x) + c = 0$:
On pose X=$\ln(x)$ c'est-à-dire $x = \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$ puis on résout l'équation d'inconnue X : $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$.

- Résolution de $a\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + b\mathrm{e}^x + c = 0$:
On pose X=e^x c'est-à-dire $x = \ln \mathrm{X}$ puis on résout l'équation d'inconnue X : $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$.

Capacité 4 ***Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction logarithme***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

1. $\ln(2x-4) < 0$

2. $\ln(2x-4) > -5$

3. $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1)$

4. $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 6$

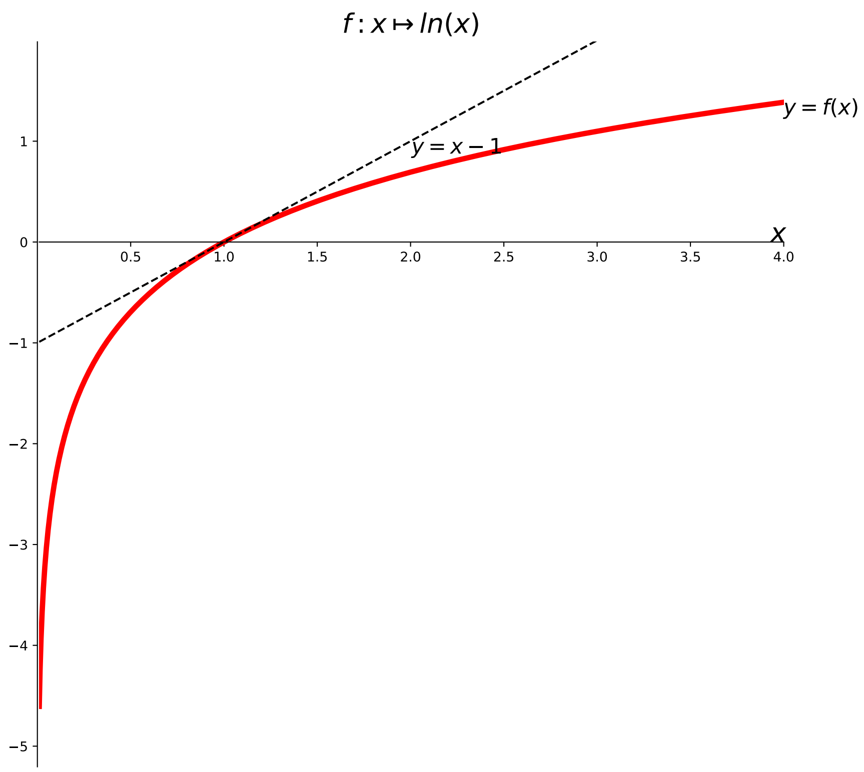
5. $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = 6$

6. $(\ln(x))^2 - \ln(x) < 6$

7. $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x} < 6$

8. $\mathrm{e}^{3-2x} > 2\left(\mathrm{e}^x\right)^2$

1.4 Propriétés de convexité



Propriété 2

1. La fonction ln est **concave** sur $]0\,;+\infty[$.

   On en déduit que dans un repère du plan, la courbe de la fonction ln est en dessous de chacune de ses tangentes.

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Démonstration

1. La fonction ln est dérivable et pour tout réel $x > 0$, on a :

   $\ln'(x) = \ldots\ldots$

   On en déduit que la fonction $\ln'$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc ln deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a :

   $\ln''(x) = \ldots\ldots$

   On a .... donc la fonction ln est concave.

2. Déterminons une équation de la tangente à la courbe de la fonction ln au point d'abscisse 1 :

   ....

   ....

   ....

   Par concavité de la fonction ln on en déduit que :

   ....

   ....

2 Propriétés algébriques

2.1 Équation fonctionnelle

Propriété 3 ***Équation fonctionnelle***

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$$

On dit que la fonction ln vérifie **l'équation fonctionnelle** $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Démonstration ***Voir page 238 du manuel Indice***

On utilise le fait que pour tous réels x et y :

$$e^x = e^y \iff x = y \quad (1)$$

et que pour tous réels z et t :

$$e^{z+t} = e^z \times e^t \quad (2)$$

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$$

Donc d'après la propriété (1) :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Algorithmique 1 ***Application de l'équation fonctionnelle du logarithme aux suites géométriques***

On estime que la population d'oiseaux d'une réserve diminue de 5% par an. Cette population est estimée en 2020 à 60000 individus.
On note u_n la population d'oiseaux en $2020 + n$.

1. **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

   b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que `seuil(k)` détermine le nombre d'années minimum au bout duquel on aura $u_n < k$.

```
def seuil(k):
    u  = 60000
    n = 0
    while ............. :
        u  = ......
        n  = ......
    return n
```

   c. Avec la calculatrice, déterminer la valeur de `seuil(30000)`.

2. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

   a. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de (v_n).

   b. Retrouver la valeur de `seuil(30000)` en résolvant une inéquation.

2.2 Corollaires de l'équation fonctionnelle

Corollaire ***Corollaire de l'équation fonctionnelle***

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \quad \text{et} \quad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstration ***Voir manuel page 238***

- Pour tout réel $a > 0$:

$$0 = \ln(1) \iff 0 = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) \iff 0 = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \iff \dots$$

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \dots$$

- Pour tout réel $a > 0$:

$$\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$$

  on conclut par équivalence

$$\ln(a) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right) \iff \dots$$

- Pour tout entier relatif n et tout entier $a > 0$:

$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n = \left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(a)}$$

  on conclut par équivalence

$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n\ln(a)} \iff \ln(a^n) = n\ln(a)$$

  On peut aussi faire une preuve par récurrence pour démontrer la formule pour tous les entiers naturels n. Pour les entiers relatifs $n < 0$, on écrit alors $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ puis on utilise les propriétés du ln déjà démontrés : $\ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n)\ln(a) = n\ln(a)$.

Capacité 5 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour simplifier une expression***

Exprimer en fonction de $\ln(3)$, $\ln(5)$ ou d'un entier :

1. $\ln(15)$
2. $\ln\left(e^{\ln(5/3)}e^{\ln(3)}\right)$
3. $\ln(\sqrt{15})$
4. $\ln(3^4)\ln(5e)$
5. $\ln(\sqrt{2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)$
6. $\ln(75)$
7. $\ln(0,6)$
8. $\ln\left((\sqrt{2}-1)^{17}\right)+\ln\left((\sqrt{2}+1)^{17}\right)$
9. $\ln\left(\dfrac{1}{e^{-\ln(2)}}\right)$

Capacité 6 ***Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme pour résoudre une équation ou une inéquation***

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes en déterminant d'abord l'ensemble de résolution :

   a. $\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln 6$

   b. $\ln((x+3)(x-2)) \leqslant 2\ln\left(\sqrt{6}\right)$

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

   a. $0,8^n \leqslant 10^{-4}$ avec $n \in \mathbb{N}$

   b. $1,02^n > 10^{2019}$

3. *Un problème de Leonhard Euler :*
   Si le nombre des hommes est doublé tous les 100 ans, quel est l'accroissement annuel ?

3 Limites et croissances comparées

3.1 Limites en 0^+ et $+\infty$

Propriété 4

☞ Limites aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty}$$

☞ On a $\boxed{\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1}$ qui peut s'écrire $\boxed{\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1}$

On en déduit une approximation de $\ln(x)$ quand x est proche de 1 : $\boxed{\ln(x) \underset{x\to 1}{\approx} x-1}$.

Démonstration ***Voir manuel Indice p. 240***

- Soit A un nombre réel quelconque. La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
  $\forall x > e^A$, $\ln(x) > A$. Ainsi l'intervalle $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x assez grand.
  Cela démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

- Pour $x>0$, on pose $X=\dfrac{1}{x}$. Alors : $\ln(x)=\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=-\ln(x)$
  $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln(x))=-\infty$ en appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée.

- La fonction ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ donc par définition du nombre dérivée

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = 1 = \ln'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Propriété 5 ***Tableau de variation complet***

1. Des propriétés sur le sens de variation et les limites de la fonction ln, on peut déduire son tableau de variations complet :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

2. La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote à la courbe de la fonction ln.

Capacité 7 ***Utiliser les propriétés de la fonction logarithme***

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^4 x}\right)$.
   - **a.** Justifier que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\ln(x)$.
   - **b.** En déduire les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
2. Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;0,5[$ par $g(x) = \ln(1-2x)$. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   - **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\ln(u_n) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.
   - **b.** Déterminer la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$.
   - **c.** En déduire, par composition, la limite de la suite (u_n).

3.2 Croissance comparée de la fonction ln avec les fonctions $x \longmapsto x^n$

Propriété 6 ***Croissance comparée avec la fonction $x \longmapsto x$***

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou de 0^+, x^n l'emporte sur $\ln x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$$

Démonstration ***Au programme, voir pages 240 et 242***

☞ On démontre d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$.

– Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;\,+\infty[$.

....

....

....

....

....

....

– En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$ on a $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$.

....

....

....

....

– En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$:

....

....

....

....

☞ On démontre ensuite que $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0^-$.

– Vérifier que pour tout réel $x > 0$, on a $x\ln(x) = \dfrac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

....

....

....

– En déduire la limite de $x\ln(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

....

....

....

☞ On démontre ensuite que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$.

– Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{\ln(x)}{x^n} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$.

– En déduire la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x^n}$ lorsque x tend vers $+\infty$:

....

....

....

☞ On démontre de même que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$:

....

....

....

....

Capacité 8 ***Calculer des limites avec la fonction logarithme***

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 + \ln(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} + \ln(x)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2 + 3}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 + 2x)\ln(x)$
8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x)}$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(ex) - \ln\left(e^{3x}\right)$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+5)e^x$
12. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^2 - \ln(x)$
14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) - e^x$
15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{1 + e^x}$

4 Fonctions composées et primitives

4.1 Fonctions composées $x \mapsto \ln(u(x))$ notées $\ln \circ u$

Propriété 7

Soit $\boldsymbol{u}$ une fonction définie sur un intervalle I qui est dérivable et strictement positive sur I.
La fonction composée $\boldsymbol{g} = \ln\circ\boldsymbol{u}$ définie sur I par $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \ln(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ est dérivable sur I et d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, on a :

$$\text{pour tout } \boldsymbol{x} \in \mathrm{I} \text{ on a } \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$$

On en déduit que les fonctions $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{g} = \ln\circ\boldsymbol{u}$ suivent les mêmes variations sur l'intervalle I.

Capacité 9 ***Résoudre un problème en utilisant les propriétés de la fonction logarithme***

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$ et déterminer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

4.2 Primitives

Propriété 8

1. La fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.
2. Soit I un intervalle et u une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur I.
   - **a.** La fonction $\ln(|u|)$ est une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I.
   - **b.** Si u est de plus strictement positive sur I alors $\ln(u)$ est une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I.

Capacité 10 ***Exprimer des primitives avec la fonction*** ln

1. Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en $\sqrt{\mathrm{e}}$.
2. Chacune des fonctions f suivantes est dérivable et donc continue sur I, et admet donc une primitive sur I. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

a. $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ sur $I =]-\infty\,;0[$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$;

c. $f(x) = \dfrac{e^{731x}}{(e^{731x}+1)^2}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;

d. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;

e. $f(x) = \dfrac{e^{731x}}{e^{731x}+1}$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$;

f. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $\mathrm{I} =]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$;

g. $f(x) = \dfrac{1}{x} \times (\ln(x))^2$ sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

Table des matières