Histoire 1

Euclide (-330/-260) a fondé ses *Éléments de géométrie* sur des définitions d'objets : point, ligne, droite, plan ... et cinq *axiomes* ou *postulats* dont il a déduit par raisonnement déductif un ensemble de propriétés. Pendant des siècles, les mathématiciens ont essayé en vain de démontrer que le cinquième postulat pouvait se déduire des autres. Sa formulation moderne est « *Par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle et une seule à cette droite* ». En remplaçant ce cinquième postulat par un autre, des géométries nouvelles, non euclidiennes, ont été développées aux XIX$^{\text{ième}}$ siècle par Lobatchevski et Klein. L'idée d'une vérité mathématique fondée sur la non-contradiction logique et non pas sur l'évidence des objets s'est alors imposée. David Hilbert (1862-1943) a développé un programme de fondement formel des mathématiques, établissant la non contradiction de la géométrie euclidienne (avec une nouvelle organisation des axiomes dont le 5$^{\text{ième}}$) dans ses *Grundlagen der Geometrie* (Fondements de la géométrie). Il définit les « points », « droites » et « plans » comme des objets abstraits sans lien avec une expérience sensible. Les axiomes sont des relations entre ces objets et démontrer une propriété consiste à déduire des axiomes de nouvelles relations. Par boutade, il affirme qu'on pourrait remplacer « points », « droites » et « plans » par « chope de bière », « table » et « chaise » sans rien changer !
Henri Poincaré (1854-1912), grand esprit universel à la charnière du XX$^{\text{ième}}$ siècle, a commenté ainsi l'ouvrage d'Hilbert : « Voici un livre dont je pense beaucoup de bien, mais que je ne recommanderais pas à un lycéen. ». D'après lui, l'intuition est nécessaire, car « c'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. »

Dans tout le chapitre, on se place dans l'espace $\mathscr{E}$.

1 Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définition du produit scalaire dans l'espace

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et B trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \vec{A}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe un plan $\mathscr{P}$ de l'espace qui contient les points A, B et C.
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace $\mathscr{E}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$.

- ☞ **Premier cas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$:** on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- ☞ **Second cas $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:** on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Propriété 1 *Produit scalaire de vecteurs colinéaires*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

- **Premier cas :** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.

- **Deuxième cas :** Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens opposés alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\|$.

Propriété 2 ***Carré scalaire***

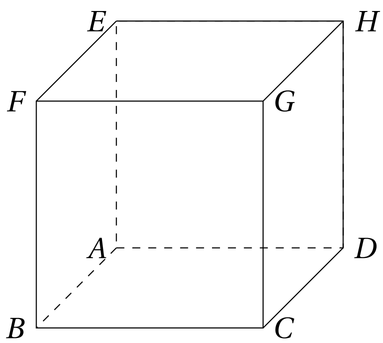
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et deux points A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

☞ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$ où $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

☞ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|AB\|^2 = AB^2$ où $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$ est la distance entre A et B.

Capacité 1 ***Calculer un produit scalaire***

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté a, I le milieu de $[BF]$ et J le milieu de $[DH]$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ}$
4. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BF}$
5. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH}$
6. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG}$
7. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{GE}$
8. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF}$

1.2 Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Propriété 3

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, et trois points distincts O, A, B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, et trois points distincts O, A, B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On se place dans le plan (OAB).
Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires si et seulement si $\widehat{BOA} = \dfrac{\pi}{2}$ radians.
Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires si et seulement si $OA \times OB \times \widehat{BOA} = 0$.
Les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$.
On note $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et on peut écrire :
On distingue deux cas :

- **Premier cas $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:** D'après la propriété précédente, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites passant par un point A quelconque de l'espace et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

- **Second cas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$:** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul et en particulier le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

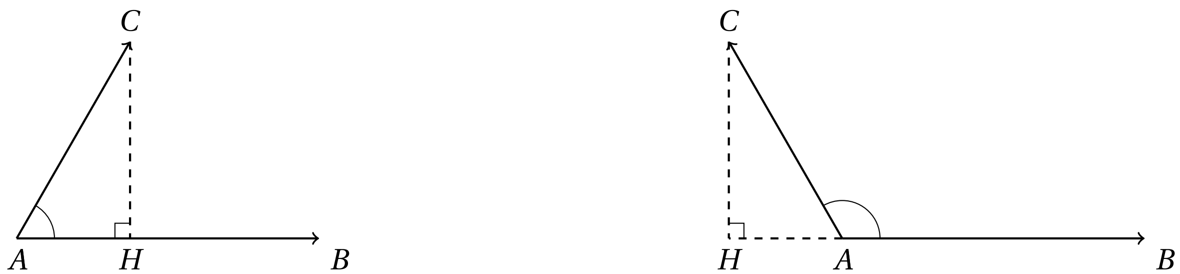
1.3 Propriétés du produit scalaire dans l'espace

Deux vecteurs définissant un plan vectoriel, les propriétés suivantes démontrées en première sont aussi valables dans l'espace.

Propriété 4 *Projection orthogonale*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Pour tous points A, B et C, si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ de sens opposés} \end{cases}$$



Démonstration

On peut généraliser la propriété démontrée dans le plan car deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Propriété 5 *Symétrie et bilinéarité*

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace ou du plan et λ un réel.

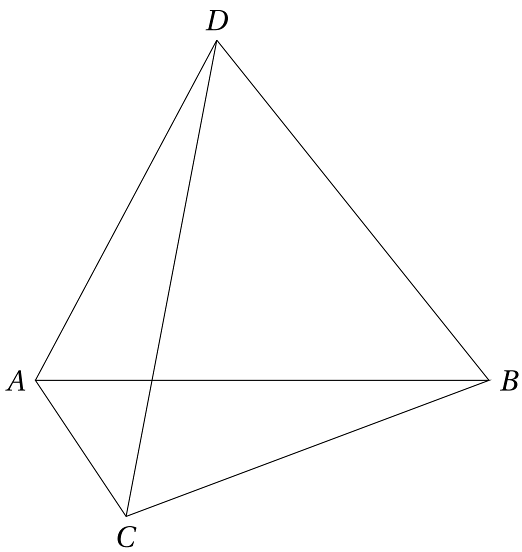
1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$
4. $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Démonstration

Trois vecteurs de l'espace ne sont pas nécessairement coplanaires, il ne suffit pas de généraliser la propriété démontrée dans le plan. Preuve en DM ?

Capacité 2 *Démontrer que des vecteurs sont orthogonaux avec le produit scalaire*

Les arêtes d'un tétraèdre régulier sont toutes de même longueur.
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$, on appelle I le milieu de $[AB]$ et on note a la longueur de l'arête $[AB]$.



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de a.
3. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 6 ***Formules de polarisation***

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. $\boxed{\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2}$
2. $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)}$
3. $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2\right)}$
4. $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{4}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2\right)}$

Démonstration ***voir manuel Indice p. 90***

1. On applique la formule du carré scalaire :

$$\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$$

on applique les propriétés de bilinéarité et symétrie et on retrouve une identité remarquable

$$\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2=\ldots$$

2. Il suffit de transformer l'égalité précédente :

....

....

....

3. On applique deux fois la formule du carré scalaire :

$$\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})-(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$$

on applique les propriétés de bilinéarité et symétrie et on retrouve deux identités remarquables

$$\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2=\ldots$$
$$\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2=\ldots$$

On conclut : ....

Capacité 3 ***Utiliser la bilinéarité du produit scalaire***

1. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de l'espace. Exprimer chacun des produits scalaires en fonction de $\left\|\vec{v}\right\|$, $\left\|\vec{w}\right\|$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

   a. $2\vec{v}\cdot(3\vec{w}-\vec{v})$;

   b. $(\vec{v}+2\vec{w})\cdot(3\vec{w}-\vec{v})$;

   c. $(\vec{v}+3\vec{w})\cdot(3\vec{w}-\vec{v})$;

   d. $\left\|\vec{v}+3\vec{w}\right\|^2$;

   e. $\left\|2\vec{v}+\sqrt{3}\vec{w}\right\|^2$;

   f. $\left\|3\vec{v}-\vec{w}\right\|^2$.

2. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs orthogonaux deux à deux tels que $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{2}$, $\left\|\vec{v}\right\|=1$ et $\left\|\vec{w}\right\|=3$.

   a. $(2\vec{v}-3\vec{w})\cdot(3\vec{v}+2\vec{w})$;

   b. $\left\|\sqrt{2}\vec{v}+\vec{w}\right\|^2$;

   c. $\left\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right\|^2$

2 Base orthonormée, repère orthonormé de l'espace

2.1 Bases et repères orthonormés

Définition 3

1. Soit un triplet $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de vecteurs de l'espace non coplanaires qui forment une **base de l'espace**.

   $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une **base orthonormée** si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et tous de norme 1.

   $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une **base orthonormée** si et seulement si $\begin{cases}\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1\\ \text{et } \vec{i}\cdot\vec{j}=0\\ \text{et } \vec{i}\cdot\vec{k}=0\\ \text{et } \vec{j}\cdot\vec{k}=0\end{cases}$.

2. Soit O un point et $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de l'espace.

   $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un **repère orthonormé** si et seulement si $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est une base orthonormée.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété 7

1. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

   Si $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ sont deux vecteurs du plan $\mathscr{P}$, alors : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$.

2. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

   - Si $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$ sont deux vecteurs de $\mathscr{E}$, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$$

- En particulier on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2$ donc $\boxed{\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- Et si $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ sont deux points de l'espace, la distance entre A et B est :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Démonstration *voir manuel Indice page 90*

Soit $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

1. Soit $\overrightarrow{u}\,(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'; y'; z')$ repérés par leurs coordonnées dans $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

On exprime les vecteurs dans la base : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.

On calcule le produit scalaire en exploitant la bilinéarité et l'orthogonalité entre vecteurs de la base :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right)\cdot\left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}\right)\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \ldots\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \ldots\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \ldots
\end{aligned}$$

2. On exprime le carré scalaire avec l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2$$

On en déduit que $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, le carré scalaire s'écrit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

On en déduit que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Capacité 4 *Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer une longueur ou un angle*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Déterminer le paramètre t pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux :

a. $\overrightarrow{u}\,(4\,;2t\,;2)$ et $\overrightarrow{v}\,(t+3\,;3\,;4)$;

b. $\overrightarrow{u}\,(4\,;\,t\,;\,t)$ et $\overrightarrow{v}\,(t\,;1\,;\,t)$.

2. Soit les points $E\,(7\,;2\,;3)$, $F\,(0\,;1\,;4)$ et $G\,(0\,;4\,;-2)$. Les droites (EF) et (EG) sont-elles perpendiculaires ?

3. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ soit les points $\mathrm{R}\,(2;0;0)$, $\mathrm{S}\left(1;\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$ et $\mathrm{T}\left(1;\sqrt{3};0\right)$. Calculer les distances OR, RS, ST et TO. Les points O, R, S et T sont-ils les sommets d'un losange ?

4. On considère les points $\mathrm{A}(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $\mathrm{B}(1\,;2\,;4)$ et $\mathrm{C}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$, arrondie au degré.

3 Orthogonalité entre droites et plans de l'espace

3.1 Orthogonalité de deux droites de l'espace

Définition 4

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

☞ $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont **orthogonales** si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

D'après la définition 2, on peut aussi écrire :

☞ $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont **orthogonales** si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$.

Capacité 5 ***Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites***

Soit $\mathscr{D}$ une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=4+3t \\ y=-2+t \\ z=1-5t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

1. Le point $B(7\,;-1\,;-4)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?

2. Soit $E(9\,;3\,;-2)$ et $F(11\,;2\,;-1)$. Les droites $\mathscr{D}$ et (BE) sont-elles orthogonales ? Les droites $\mathscr{D}$ et (BF) sont-elles orthogonales ?

3. Quelle propriété vraie dans le plan n'est plus vraie dans l'espace ?

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan de l'espace

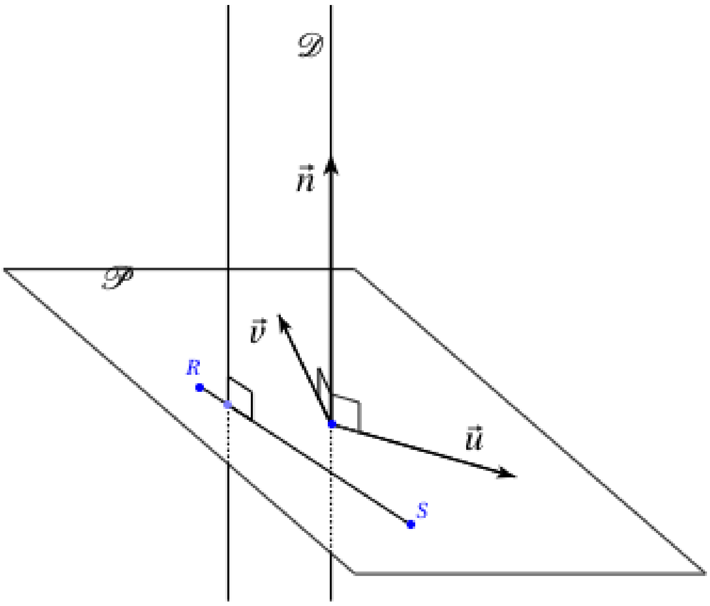
Définition 5

Une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathscr{P}$.

Propriété 8

1. Une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ \text{et } \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathscr{P}$.
2. Une droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathscr{P}$.

Démonstration *voir manuel Indice p. 100*



Capacité 6 *Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité d'une droite et d'un plan*

Amérique du sud novembre 2017.
On considère un cube ABCDEFGH (voir la figure de la capacité 1).

1. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
2. Sans utiliser de coordonnées, en déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
3. En choisissant un repère orthonormé du plan, démontrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

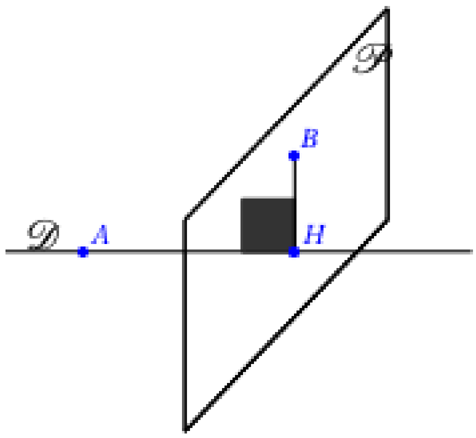
4. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

4 Projections orthogonales dans l'espace

4.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite de l'espace

Théorème 1

Soit B un point et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace, il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant par B et orthogonal à $\mathscr{D}$.
Le point d'intersection H de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$ est **le projeté orthogonal** du point B sur la droite $\mathscr{D}$.
En particulier, si B appartient à $\mathscr{D}$ alors B est confondu avec son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$.



Propriété 9

Soit B un point et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Pour tout point M de la droite $\mathscr{D}$ on peut définir sa distance $\mathrm{d}(M, B)$ au point B.
Le projeté orthogonal H de B sur $\mathscr{D}$ minimise la distance de B à un point M de $\mathscr{D}$:

$$\text{pour tout } M \text{ de } \mathscr{D} \text{ on a } \mathrm{d}(H, B) \leqslant \mathrm{d}(M, B)$$

Si H est le projeté orthogonal du point B sur la droite $\mathscr{D}$, alors BH est la distance du point B à la droite $\mathscr{D}$.

Démonstration

Soit B un point et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Par définition, le projeté orthogonal H de B sur $\mathscr{D}$, est l'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan passant par B et orthogonal à $\mathscr{D}$.
On raisonne par disjonction des cas :

- $\boxed{\text{Premier cas : } B \in \mathscr{D}}$ B est alors confondu avec H et $BH = 0$ est nécessairement la plus petite distance entre B et un point de $\mathscr{D}$.

- $\boxed{\text{Second cas : } B \notin \mathscr{D}}$ On peut définir la droite (BH). La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc à la droite (BH) contenue dans $\mathscr{P}$.

  Pour tout point M de $\mathscr{D}$ qui est distinct de H, on peut définir la droite $(MH) = \mathscr{D}$ sécante avec (BH). Puisque $\mathscr{D} \perp (BH)$, dans le plan (MHB), le triangle MHB est rectangle et d'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse MB est plus grande que HB longueur d'un côté de l'angle droit.

  Pour tout point M de $\mathscr{D}$ qui est distinct de H, on a donc $MB > HB$.

  HB est bien la plus petite distance entre B et un point de $\mathscr{D}$.

Capacité 7 *Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite (Méthode 1)*

Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2 \\ z = 2-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
On souhaite déterminer la distance du point $A(2;4;0)$ à la droite $\mathscr{D}$.
À tout réel t, on associe le point M de $\mathscr{D}$ de coordonnées $M(t+1;2;2-t)$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel t associe la distance $f(t) = AM$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer que $f(t) = \sqrt{2t^2 - 6t + 9}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

4.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan de l'espace

Théorème 2

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et A un point. Il existe une unique droite $\mathscr{D}$ passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$.
Le point d'intersection H de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{P}$ est **le projeté orthogonal** du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
En particulier, si A appartient à $\mathscr{P}$ alors A est confondu avec son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$.

Propriété 10

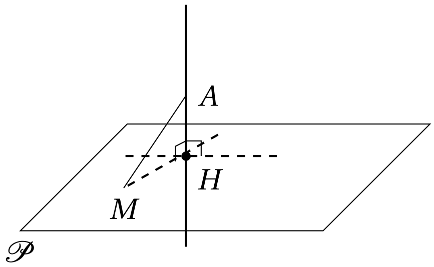
Soit A un point et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ on peut définir sa distance $\mathrm{d}(M, A)$ au point A.
Le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$ minimise la distance de A à un point M de $\mathscr{P}$:

$$\text{pour tout } M \text{ de } \mathscr{P} \text{ on a } \mathrm{d}(H, A) \leqslant \mathrm{d}(M, A)$$

Si H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$, alors AH est la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

Démonstration ***au programme, voir manuel Indice p.94***

Soit A un point et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Par définition, le projeté orthogonal H de A sur $\mathscr{P}$, est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$.

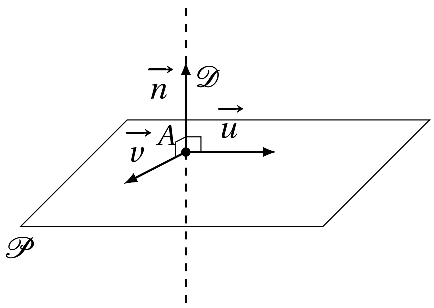


On raisonne par disjonction des cas :

- $\boxed{\text{Premier cas : } A \in \mathscr{P}}$ A est alors confondu avec H et $AH = 0$ est nécessairement la plus petite distance entre A et un point de $\mathscr{P}$.
- $\boxed{\text{Second cas : } A \notin \mathscr{P}}$ La droite (AH) est alors la droite passant par A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
  Pour tout point M de $\mathscr{P}$ qui est distinct de H, on peut définir la droite $(MH) = \mathscr{D}$ qui est sécante avec (AH).
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

5 Équation de plan

5.1 Vecteur normal à un plan



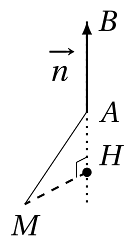
Définition 6

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace $\mathscr{E}$ et soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
$\overrightarrow{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathscr{P}$ si et seulement si c'est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$.

Propriété 11

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace $\mathscr{E}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ est le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Démonstration



Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace $\mathscr{E}$.
On note B le point distinct de A tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n}$.
Pour tout point M de l'espace, on définit H son projeté orthogonal sur la droite (AB).

On raisonne par équivalence :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Or H projeté orthogonal de point M sur la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc $\overrightarrow{HM} \cdot n = 0$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ ssi $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow A = H$$

On en déduit que :
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ si et seulement si le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) est le point A.
Par définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite :
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ si et seulement si M appartient au plan passant par A et orthogonal à (AB).
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ si et seulement si M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB}$.

5.2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 3

Dans l'espace $\mathscr{E}$, soit A un point et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul.

1. Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ admet une équation cartésienne de la forme

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

2. Réciproquement, l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

   où a, b, c non tous nuls, est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$.

Démonstration

1. Soit le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$, d'après la propriété 9 :

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Soit Γ l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c non tous nuls.

   On peut supposer par exemple $b \neq 0$ alors $A\left(0\,;\,\dfrac{-d}{b}\,;\,0\right)$ appartient à Γ.

   Soit $\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ et soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$.

   D'après la propriété 9 on a :

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

....

Donc $\Gamma = \mathscr{P}$ et c'est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (a\,;b\,;c)$.

Capacité 8 ***Déterminer si un vecteur est normal à un plan, voir capacité 7 p.95 du manuel***

L'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soit les points $A(1\,;1\,;0)$, $B(-1\,;2\,;0)$ et $C(2\,;0\,;-3)$

1. Démontrer que A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(3\,;6\,;-1)$ est normal au plan (ABC).

Capacité 9 ***Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan, voir capacité 10 p.97 du manuel***

L'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x - y + d = 0$, où d désigne un réel.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
2. Soit J le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{5}{2}\,;-5\right)$.

   Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathscr{P}$. Justifier la réponse

Capacité 10 ***Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, soit $A\,(3\,;-1\,;4)$, $B\,(2\,;1\,;4)$ et $C\,(3\,;-2\,;0)$.

1. Déterminer une équation de chacun des trois plans de base de repères respectifs $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, $\left(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}\right)$, $\left(O\,;\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\ (4\,;-3\,;1)$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_3$ passant par C et parallèle au plan $\mathscr{P}_2$.
5.
   a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan.

   b. $\boxed{\text{Équation du plan } (ABC),\ 1^{\text{ère}} \text{ méthode}}$

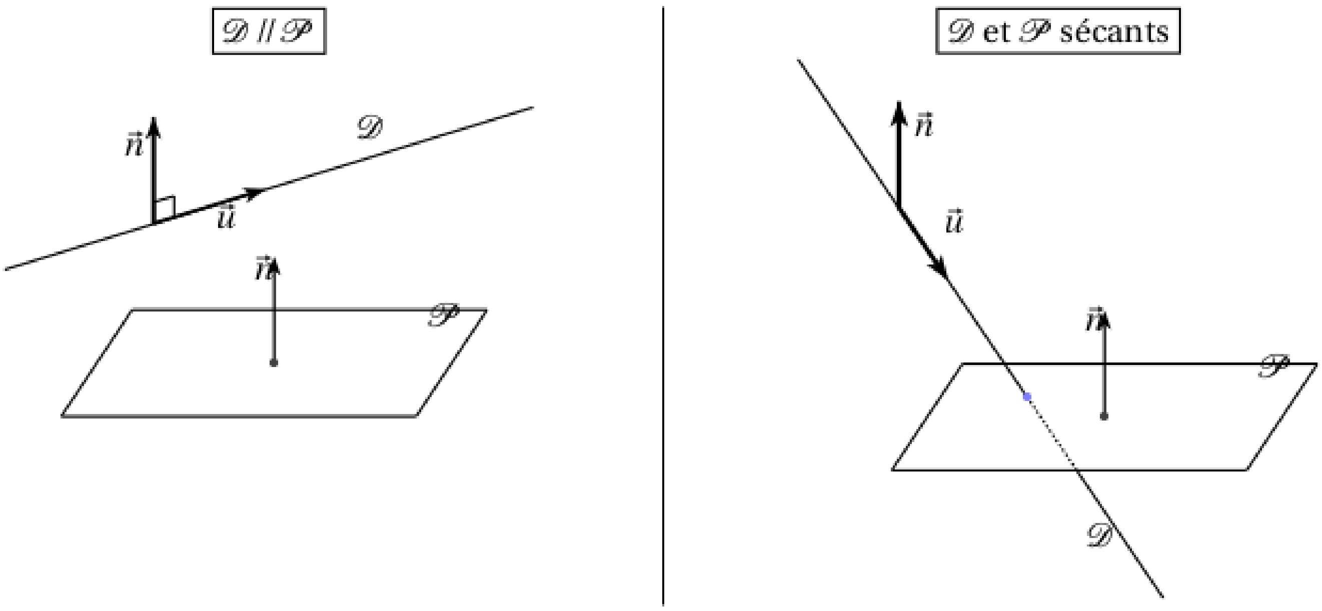
   Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}\ (a\,;b\,;c)$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en résolvant un système de deux équations linéaires à trois inconnues. En déduire une équation du plan (ABC).

   c. $\boxed{\text{Équation du plan } (ABC),\ 2^{\text{ème}} \text{ méthode}}$

Résoudre le système de trois équations à quatre inconnues a, b, c, d : $\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \end{cases}$

En déduire une équation du plan (ABC).

5.3 Résolution d'un problème d'intersection à l'aide d'un système d'équations linéaires



Propriété 12

Dans l'espace, soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A et soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux :
  - Si A appartient à $\mathscr{P}$ alors $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$.
  - Si A n'appartient pas à $\mathscr{P}$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun.

Capacité 11 ***Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan***

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= -7+t \\ y &= 4+2t \\ z &= -5-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $-2x-3y+z-6=0$.

1. Déterminer si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
2. Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

5.4 Retour sur la distance d'un point à une droite ou d'un point à un plan

Capacité 12 ***Déterminer la distance d'un point à une droite par projection orthogonale (Méthode 2)***

Voir capacité 8 p. 95 du manuel Indice.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(3;4;12)$, $B(3;0;2)$ et $C(1;2;3)$.
On souhaite la distance du point A à la droite (BC).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (BC).
3. Donner une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
5. Calculer la longueur AH qui est la distance du point A à la droite (BC).

Capacité 13 ***Déterminer la distance d'un point à plan par projection orthogonale***

Voir capacité 8 p. 95 du manuel Indice et exercice 91 p.107.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2;4;0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-3y+2z+3=0$.
On souhaite déterminer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.
On désigne par H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

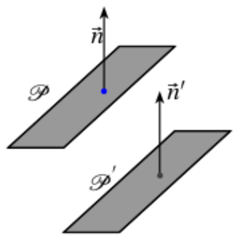
1. Donner un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AH).
3. Calculer les coordonnées du point H d'intersection de la droite (AH) et du plan $\mathscr{P}$.
4. Calculer la distance AH qui est la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

5.5 Intersection de deux plans

Propriété 13

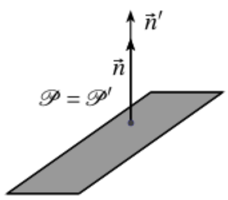
Soit deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$, 3 cas sont possibles :

$\boxed{1^{er}\text{ cas}}$ **$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.**



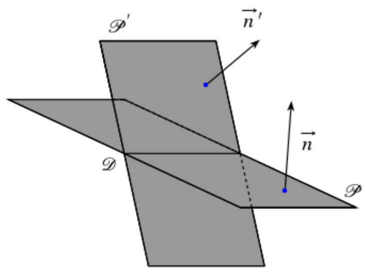
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$
Il existe au moins un point de $\mathscr{P}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{P}'$ et $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ colinéaires.

$\boxed{2^{\text{ème}}\text{ cas}}$ **$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et confondus.**

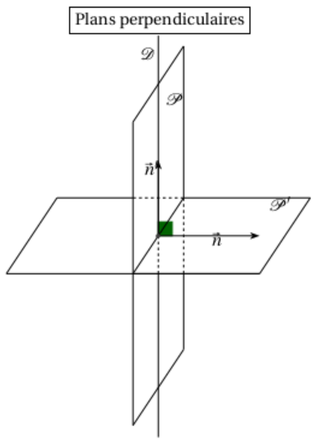


$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P}$
Il existe au moins un point de $\mathscr{P}$ qui appartient à $\mathscr{P}'$ et $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ colinéaires.

$\boxed{3^{\text{ème}}\text{ cas}}$ **$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et leur intersection est une droite $\mathscr{D}$.**



$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{D}$ et $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ non colinéaires.
Cas particulier : Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont de plus orthogonaux, on dit que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **perpendiculaires**.



Capacité 14 ***Déterminer les positions relatives de deux plans***

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $5x+2y-4z+7=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $-10x-4y+8z-7=0$.
   Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles.

2. Soit $\mathscr{P}_3$ le plan d'équation $4x+2y-6z+8=0$ et $\mathscr{P}_4$ le plan d'équation $-6x-3y+9z-12=0$.
   Montrer que $\mathscr{P}_3$ et $\mathscr{P}_4$ sont confondus.

3. Soit $\mathscr{P}_5$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_5}\,(1\,;-1\,;1)$ et $\mathscr{P}_6$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_6}\,(0\,;2\,;2)$.
   Démontrer que $\mathscr{P}_5$ et $\mathscr{P}_6$ sont perpendiculaires.

Table des matières