**Histoire 1**

Johan Jensen (1859 - 1925) est un ingénieur et mathématicien autodidacte danois, qui effectua tous ses travaux mathématiques pendant ses loisirs. Il travailla sur les fonctions convexes et laissa son nom à une inégalité vérifiée par une fonction convexe $f$ et des $n$-uplets de réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $(x_1,\dots,x_n)$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité permet de démontrer, avec la concavité de la fonction logarithme, l'inégalité arithmético-géométrique. Pour tout $n$-uplet de réels positifs $(x_1,\dots,x_n)$, on a :

$$\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\leqslant\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$

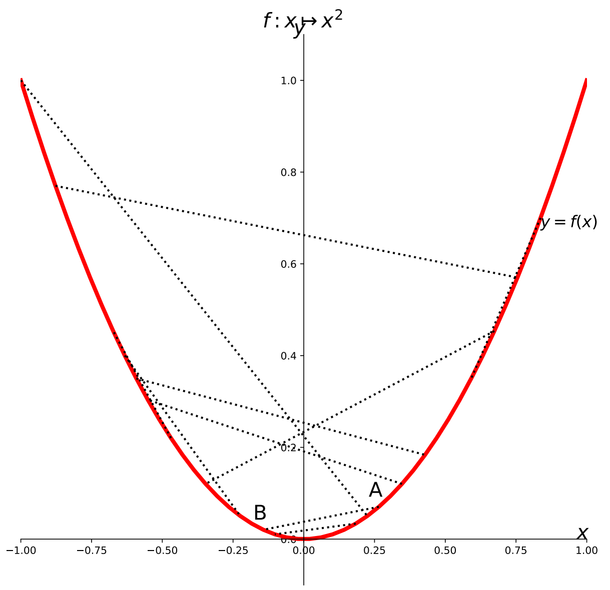
# 1 Convexité et lecture graphique

**Définition 1**

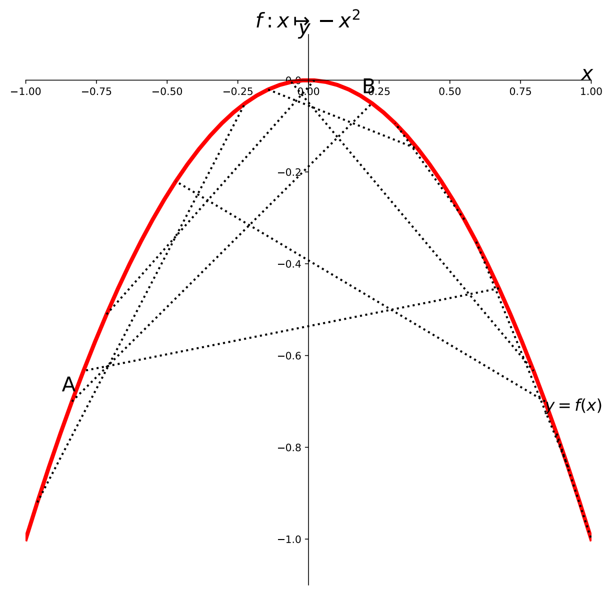
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- ☞ $f$ est **convexe** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}_f$, la corde [AB] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.
- ☞ $f$ est **concave** sur I si et seulement si pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}_f$, la corde [AB] est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ entre A et B.

**Fonction convexe et cordes**



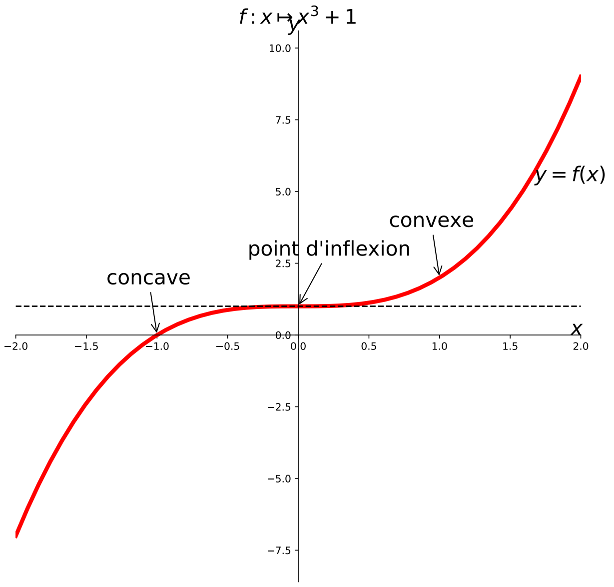

**Fonction concave et cordes**



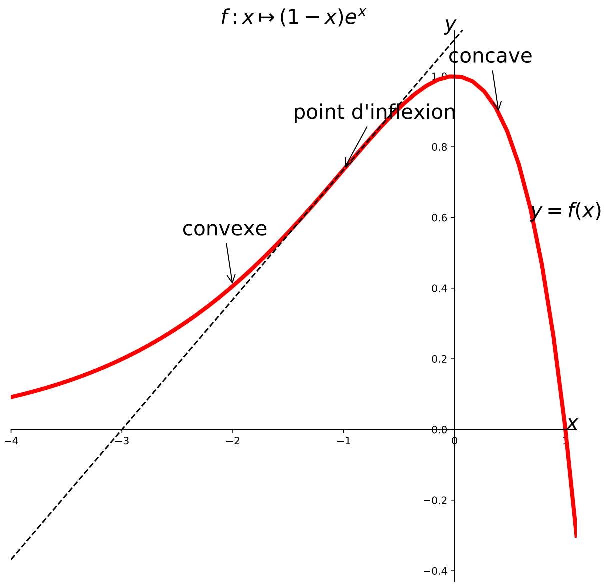
### Définition 2

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan et $a$ un nombre réel appartenant à I.
Le point A de coordonnées $\left(a\,;\,f(a)\right)$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente au point A.

**Point d'inflexion 1**




**Point d'inflexion 2**




### Propriété 1

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan et $a$ un nombre réel appartenant à I.
Si le point A de coordonnées $\left(a\,;\,f(a)\right)$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ alors la fonction $f$ change de convexité en $a$ : elle passe de *convexe à concave* ou de *concave à convexe*.

### Capacité 1 *Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction*

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

   **a.** $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

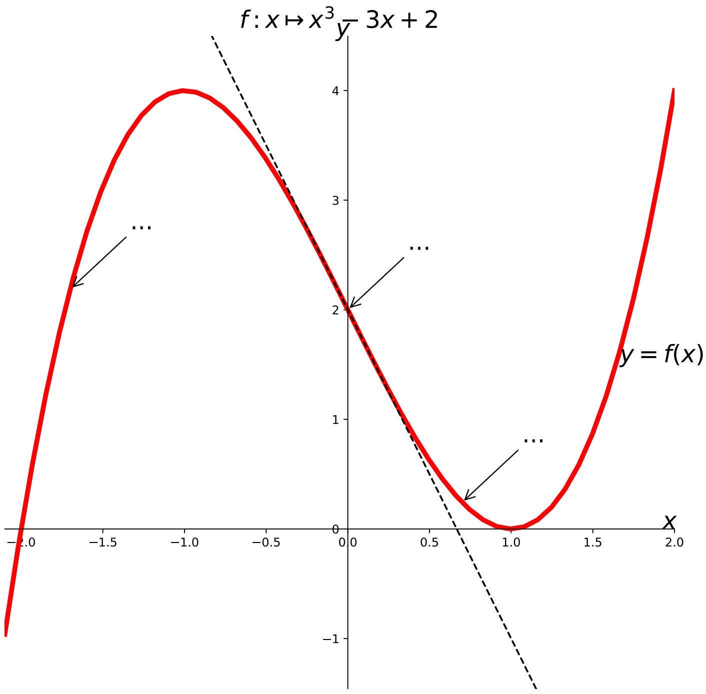
   **b.** $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.

   **c.** $h$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

   **d.** $m$ définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = \mathrm{e}^x$.

   **e.** $c$ définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = x^3$.

2. Si $f$ est une fonction convexe sur un intervalle I, que peut-on dire de la fonction $-f$ ?
3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



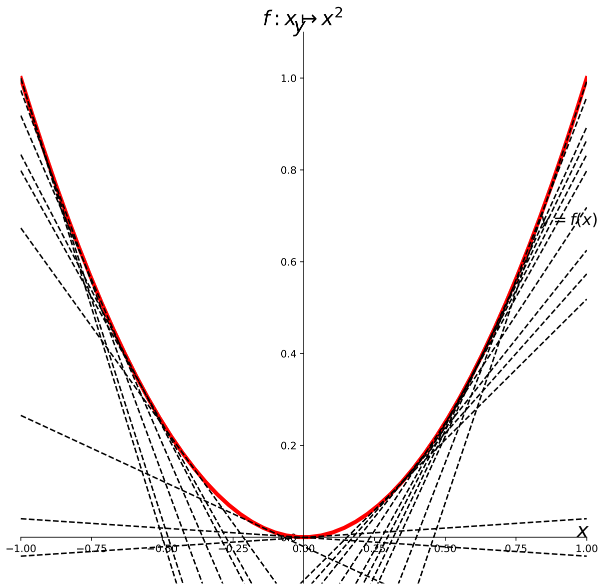

## 2 Convexité et sens de variation de $f'$

**Propriété 2**

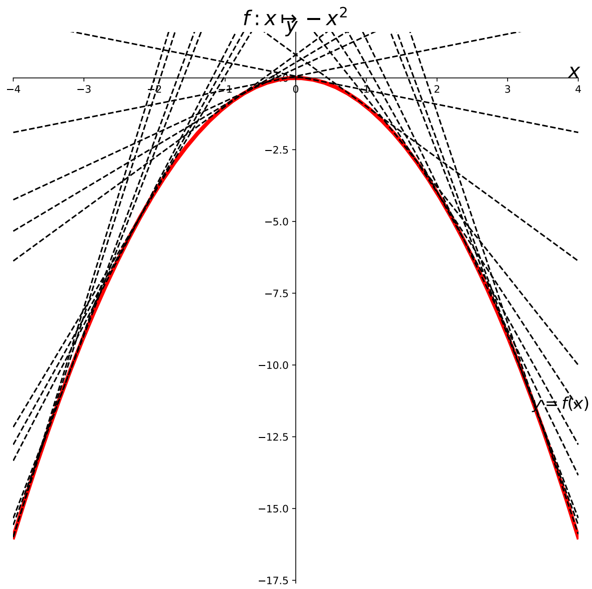
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. $f$ est **convexe** sur I si et seulement si $f'$ est croissante sur I.
2. $f$ est **concave** sur I si et seulement si $f'$ est décroissante sur I.

**Fonction convexe et tangentes**




**Fonction concave et tangentes**




**Capacité 2** ***Lien entre convexité et sens de variation***

Compléter les phrases :

- Si $f$ est convexe et croissante sur un intervalle I, alors $f$ croît de plus en plus ....
- Si $f$ est convexe et décroissante sur un intervalle I, alors $f$ décroît de plus en plus ....
- Si $f$ est concave et croissante sur un intervalle I, alors $f$ croît de plus en plus ....
- Si $f$ est concave et décroissante sur un intervalle I, alors $f$ décroît de plus en plus ....

## 3 Convexité et signe de la dérivée seconde $f''$

**Propriété 3**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1. $f$ est **convexe** sur I si et seulement si pour tout réel $x$ appartenant à I, on a $f''(x) \geqslant 0$.
2. $f$ est **concave** sur I si et seulement si pour tout réel $x$ appartenant à I, on a $f''(x) \leqslant 0$.

**Propriété 4**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.

1. Si pour tout réel $x$ appartenant à I, on a $f''(x) \geqslant 0$, alors la courbe de $f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

2. Si pour tout réel $x$ appartenant à I, on a $f''(x) \leqslant 0$, alors la courbe de $f$ est en dessous de chacune de ses tangentes.

### Corollaire

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.

1. Si $f$ est convexe sur I alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si $f$ est concave sur I alors $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

### Démonstration *Au programme, voir manuel Indice p. 206*

1. **Premier cas :** Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que pour tout réel $x \in$ I, on a $f''(x) \geqslant 0$ ce qui équivaut au fait que $f$ est convexe sur I d'après la propriété précédente.

   Démontrons que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ pour tout réel $a \in$ I.

   - On fixe un réel $a \in$ I.
   - Une équation de $\mathscr{T}_a$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   - $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$ si et seulement si pour tout réel $x \in$ I, on a :

   $$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

   On définit la fonction $d$ sur I par $d(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.
   $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$ si et seulement si pour tout réel $x \in$ I, on a $d(x) \geqslant 0$.
   On étudie les variations de la fonction $d$ sur I :

   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................

On en déduit le signe de la fonction $d$ sur I :

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

On peut conclure pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $d(x) \geqslant 0$, ce qui équivaut au fait que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathscr{T}_a$.

- On a démontré que pour tout réel $a \in \mathrm{I}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente $\mathscr{T}_a$.

**2.** **Deuxième cas :** Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $f''(x) \leqslant 0$ ce qui équivaut au fait que $f$ est concave sur I d'après la propriété précédente.

La fonction $-f$ est telle que pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, on a $(-f)''(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $-f$ est convexe sur I. D'après le premier cas, la courbe de $-f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Par symétrie d'axe $(Ox)$l'axe des abscisses, la courbe de $-f$ est en dessous de chacune de ses tangentes.

## Capacité 3 *Esquisser $\mathscr{C}_f$ à partir des tableaux de variations de $f$, $f'$ ou $f''$, voir capacité 6 p.207*

**1.** On considère une fonction $f$ deux fois dérivable sur $[-5\,;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée $f'$ :

| $x$ | $-5$ | | $-2$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $3$ | | | | $0$ |
| | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| | $-1$ | | | | $-2$ | | |

| $x$ | $-5$ | | $0$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $3$ | | | | $2$ | | |
| | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |
| | | | $-2$ | | | | $0$ |

Déterminer la convexité de la fonction $f$ et tracer dans un repère une courbe possible pour $f$.

**2.** On considère une fonction $g$ deux fois dérivables sur $[-2\,;6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de $g$ et $g''$.

| $x$ | $-2$ | $0$ | $3$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $2$ |

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $1$ | $-4$ | $3$ | $5$ | $2$ | $0$ |

Déterminer la convexité de la fonction $g$ et tracer dans un repère une courbe possible pour $g$.

**Capacité 4** ***Démontrer qu'une fonction est convexe***

Soit $f$ une fonction convexe et deux fois dérivable sur un intervalle I.
Démontrer que la fonction composée $\mathrm{e}^f$ est convexe sur I.

## 4 Point d'inflexion et dérivée seconde

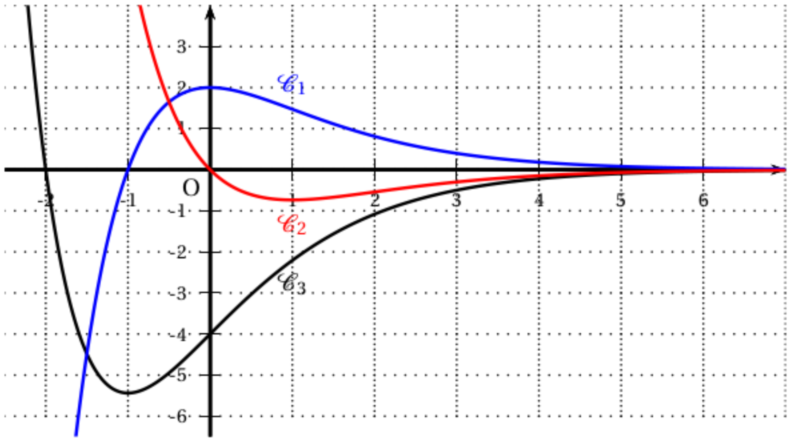
**Propriété 5**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, soit $a \in \mathrm{I}$ et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.
Le point A de coordonnées $\left(a\,;\,f(a)\right)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $f''$ s'annule en $a$ en changeant de signe.

**Capacité 5** ***Lier une représentation graphique de $f$, $f'$ ou $f''$***

On considère une fonction $f$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

**1.** Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction $f$, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction $f$.




2. On admet que pour tout réel $x$, on a $f(x) = (-2x-4)e^{-x}$.

   a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel $x$.

   b. En déduire l'étude de la convexité de $f$ et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.

**Capacité 6** ***Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208***

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel $x$ puis étudier la convexité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3. En déduire que pour tout réel $x$, on a $e^{-x} \geqslant 1-x$.

4. Démontrer que pour tous réels $a$ et $b$, $e^{-\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^{-a}+e^{-b}}{2}$.

## Table des matières