Histoire 1

Louis Augustin Cauchy (1789-1857) est un mathématicien et physicien français, polytechnicien à 16 ans, qui a produit l'une des oeuvres les plus prolifiques de l'histoire. Sa mémoire est entachée par sa négligence à l'égard des travaux des jeunes mathématiciens Abel et Galois, dont il perd les manuscrits. Son **Cours d'analyse** de 1821 est l'un des premiers exposés rigoureux dans ce domaine. Il y énonce et démontre le théorème des valeurs intermédiaires : « *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entres les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation $f(x) = b$ par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.* » .

1 Continuité d'une fonction

La notion de continuité d'une fonction f traduit mathématiquement le fait que sa courbe représentative peut se tracer sans « trou », sans « lever le crayon ».

1.1 Continuité locale

Définition 1

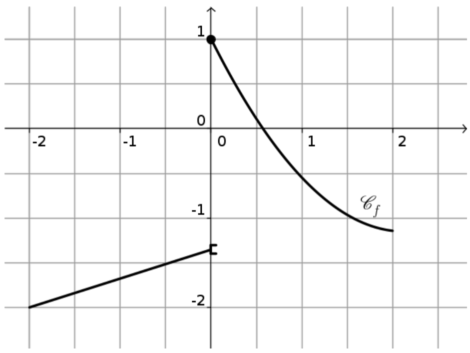
Dire que f est continue au point a, c'est dire que f est définie sur un intervalle contenant a et qu'elle admet une limite en ce point. Cette limite est alors nécessairement $f(a)$.

$$f \text{ continue en } a \text{ équivaut à } \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Capacité 1 ***Étudier la continuité d'une fonction (voir capacité 1 p.203)***

1. Déterminer les points de continuité et de discontinuité de la fonction représentée ci-contre.
2. Représenter la courbe d'une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$, telle que $f(-2) > 0$ et $f(2) < 0$ et f ne s'annule pas sur $[-2\,;2]$.

   f peut-elle être continue sur $[-2\,;2]$?



Source : Rico602 [CC BY-SA 3.0]

1.2 Continuité globale

Définition 2

On dit qu'une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$ ou de cet intervalle.

Propriété 1 *Continuité et dérivabilité*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque 1

- La réciproque de ce théorème est fausse, comme le prouve le contre-exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ mais qui n'est pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ est dérivable donc continue sur $]-\infty\,; 3[$ et sur $]3\,; +\infty[$.
  On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$		‖		$+\infty$ ↘ 0

Propriété 2 *admise*

1. **D'après la propriété 1, la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle I suffit à prouver sa continuité.**
2. Une fonction peut être continue mais pas dérivable sur un intervalle. Pour le prouver on peut appliquer les règles opératoires suivantes sur les fonctions continues.
   - Les fonctions polynômes et la fonction valeur absolue $x \mapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,; +\infty[$.
   - Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.
   - Si u et v sont continues sur I, alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (pour tout entier naturel n non nul) sont continues sur I
     , $\dfrac{u}{v}$, $\sqrt{u}$ et e^u sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies.

La justification de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle n'est pas *un objectif du programme. Si besoin (Théorème des valeurs intermédiaires), on justifiera brièvement qu'une fonction est continue en disant soit qu'elle est dérivable par règles opératoires, soit qu'elle est continue par règles opératoires si elle n'est pas dérivable sur tout l'intervalle.*

2 Continuité et suites

2.1 Image d'une suite par une fonction

Définition 3
Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes u_n.
L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $\left(f(u_n)\right)$ définie sur $\mathbb{N}$.

2.2 Image d'une suite convergente par une fonction continue

Propriété 3
Soit (u_n) une suite qui converge vers un nombre réel ℓ.
Soit I un intervalle qui contient ℓ et tous les termes de la suite (u_n) : pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle I alors la suite $\left(f(u_n)\right)$ converge vers le nombre $f(\ell)$.

Capacité 2 ***Étudier une suite du type*** $(f(u_n))$
Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x(1-x)$.

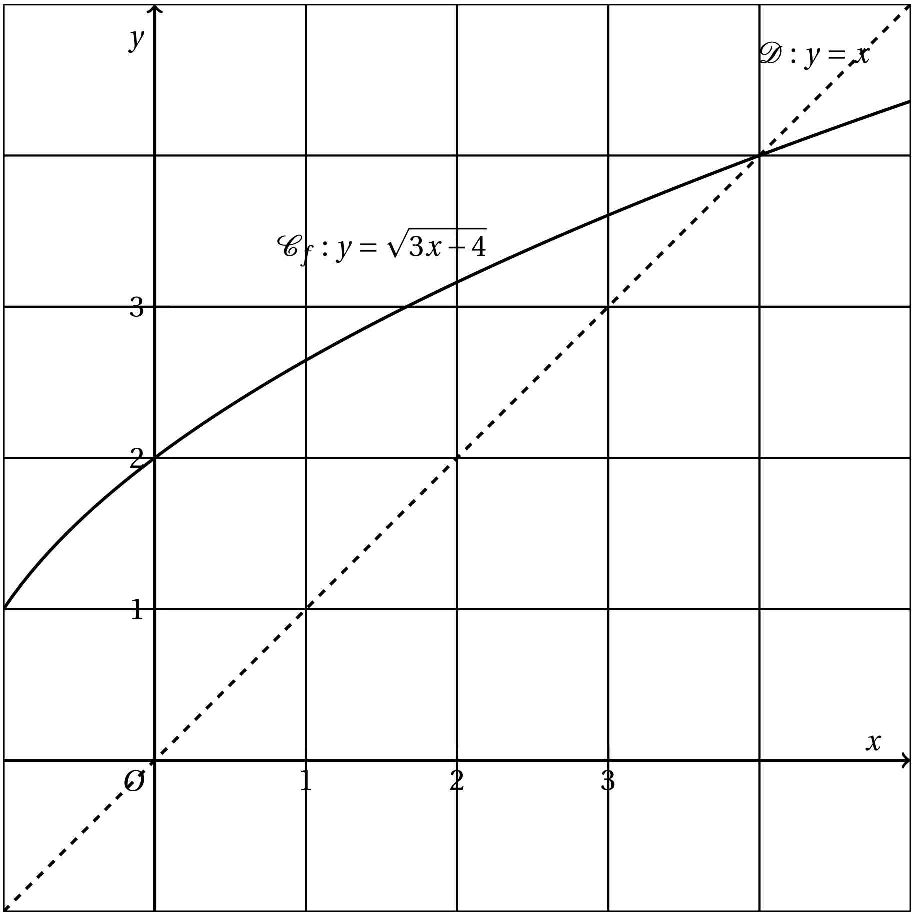
1. Justifier que f est continue sur $[0\,;1]$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$.
3. On considère la suite u définie par $u_0 = 0,4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   - **b.** En déduire que la suite u converge vers une limite ℓ.
   - **c.** Justifier que $\ell = f(\ell)$.
   - **d.** En déduire la valeur de ℓ.

2.3 Étude d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété 4
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathrm{I}$ alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ donc est solution sur I de l'équation $f(x) = x$.

Capacité 3 ***Étudier une suite définie par*** $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
On a représenté graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



1. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite en appliquant cet algorithme de construction :

- **Étape 1 :** On part du point C_0 sur l'axe des abscisses de coordonnées $(u_0\,;0)$ et on construit le point A_0 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0 et d'ordonnée $f(u_0) = u_1$.
- **Étape 2 :** On construit le point B_0 sur la droite d'équation $y = x$ de même ordonnée u_1 que A_0 et d'abscisse u_1.
- **Étape 3 :** On construit le point C_1 sur l'axe des abscisses de même abscisse que B_0. Les coordonnées de C_1 sont $(u_1\,;0)$ et on commence une nouvelle itération à l'étape 1.

2. Calculer avec une machine les valeurs décimales approchées des premiers termes de (u_n) et vérifier la cohérence de la construction graphique.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.

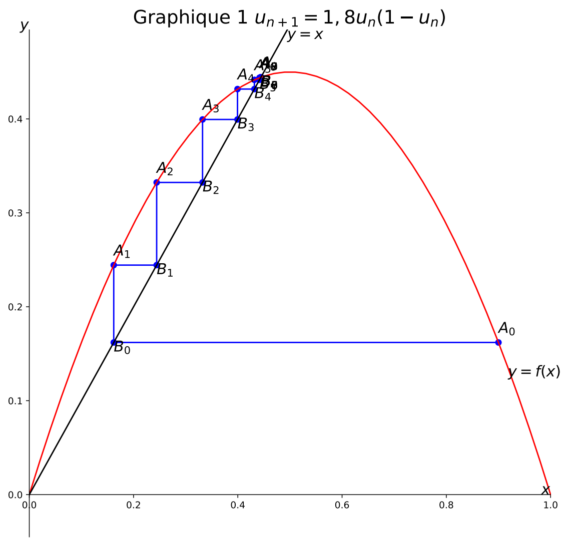
5. Déterminer sa limite en appliquant la propriété précédente.

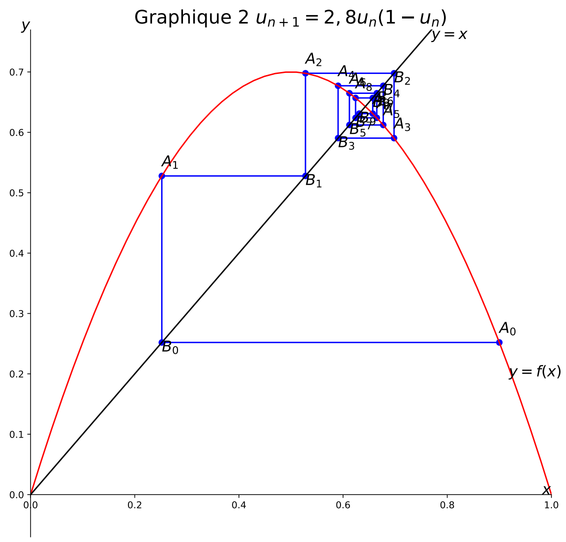
Remarque 2

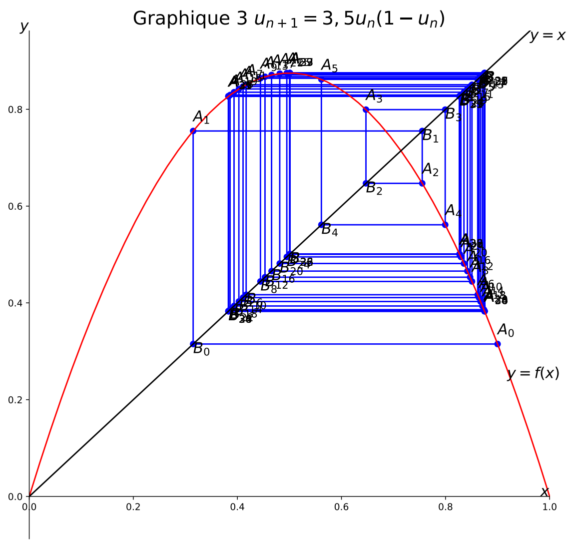
Une suite logistique est une suite définie par une relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mu u_n(1-u_n)$ avec μ un paramètre fixé.
Les solutions discrètes du modèle d'évolution de population de Verhulst sont des suites logistiques. Extrait de l'article de Wikipedia :

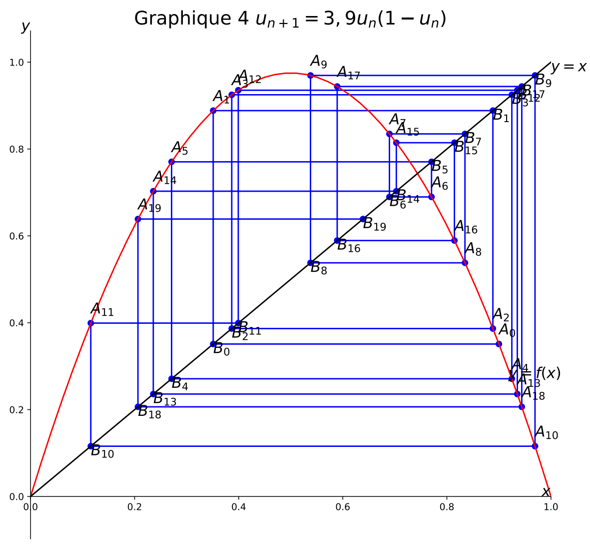
> *Le modèle de Verhulst imagine que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente.*

Selon les valeurs du paramètre μ, une suite logistique peut être convergente (graphiques 1 et 2), oscillante entre plusieurs points d'attraction (graphique 3) ou chaotique avec une dépendance très forte aux conditions initiales (graphique 4).







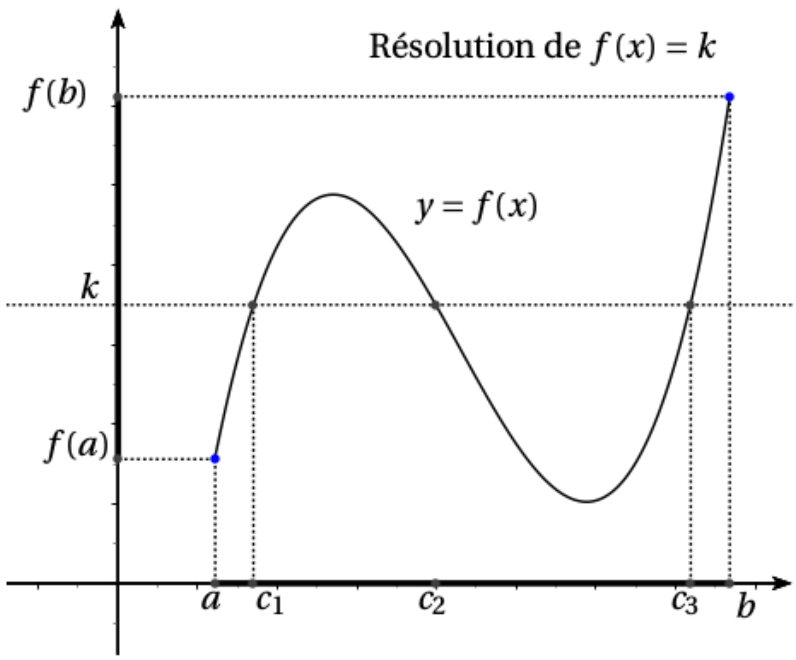


3 Théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 ***dit TVI, admis***

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Capacité 4 *Utiliser un théorème d'existence*

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[-1\,;6]$. Vérifier graphiquement avec la calculatrice.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0\,;1]$.

3.2 Fonction strictement monotone

Définition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est **strictement croissante** sur I si pour tous réels a et b dans I, $a < b$ implique $f(a) < f(b)$.
2. f est **strictement décroissante** sur I si pour tous réels a et b dans I, $a < b$ implique $f(a) > f(b)$.
3. f est **strictement monotone** sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Propriété 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

1. (*Hypothèse forte*) Si f' est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. (*Hypothèse faible*) Si f' est strictement positive sur I sauf en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.
3. (*Hypothèse forte*) Si f' est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I.
4. (*Hypothèse faible*) Si f' est strictement négative sur I sauf en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.

Capacité 5 *Démontrer qu'une fonction est strictement monotone*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

1. Conjecturer graphiquement les limites aux bornes et le sens de variation de la fonction f.
2. Démontrer ces conjectures.

3.3 Corollaires du TVI

Corollaire ***dit théorème de la bijection***

Si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$.
On dit que f est une **bijection** de $[a; b]$ dans son intervalle image $f([a; b])$.

Démonstration ***Exemple de raisonnement par l'absurde***

Soit f une fonction continue strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$ et un réel k tel que $f(a) > k > f(b)$.

- D'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ solution de l'équation $f(x) = k$.
- Soit d une solution quelconque dans $[a; b]$ de l'équation $f(x) = k$.

  Supposons que $d \neq c$, on raisonne par disjonction des cas :

  ☞ 1^{er} cas : $c < d$:

  f est strictement décroissante sur $[a; b]$ donc $f(c) > f(d)$ ce qui contredit le fait que $f(c) = f(d) = k$

  ☞ 2^e cas : $d < c$:

  f est strictement décroissante sur $[a; b]$ donc $f(d) > f(c)$ ce qui contredit le fait que $f(c) = f(d) = k$

  L'hypothèse $d \neq c$ est donc fausse. Par l'absurde on a donc démontré que c est l'unique solution de l'équation $f(x) = k$ dans $[a; b]$.

Pour une fonction f continue strictement croissante sur $[a; b]$, le raisonnement est similaire en remplaçant $f(a) > k > f(b)$ par $f(a) < k < f(b)$.

Corollaire ***généralisation aux intervalles ouverts ou semi-ouverts***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, du type $[a; b[$,$]a; b]$, $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; b]$ ou $]-\infty; b[$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$(ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$) et $f(b)$(ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$), l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans I (qui est unique si la fonction est strictement monotone).

Capacité 6 ***Utiliser le théorème de la bijection et encadrer une solution d'équation par balayage***

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. À l'aide du théorème de la bijection, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ selon les valeurs du réel k.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x)=3$ possède une unique solution α dans l'intervalle $]0\,;1[$ et une unique solution β dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

   b. Par balayage avec la calculatrice, démontrer que :
   - $1{,}5<\beta<1{,}6$
   - $1{,}51<\beta<1{,}52$
   - $1{,}512<\beta<1{,}513$

   c. On admet que la fonction ln est une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
   On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(x)+3\mathrm{e}^{-x}$.
   - Montrer que pour tout réel $x>0$, on a $g'(x)=\dfrac{f(x)-3}{\mathrm{e}^x}$.
   - Déduire des questions précédentes l'étude des variations de g.

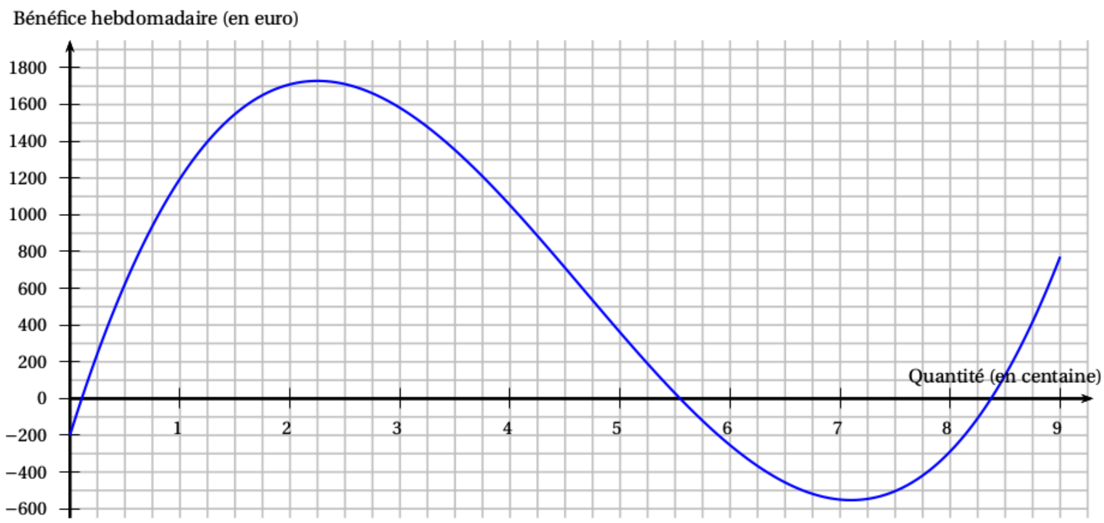
3.4 Recherche d'une solution approchée d'une équation par dichotomie

Capacité 7 ***Encadrer la solution d'une équation par dichotomie***

Une entreprise fabrique et vend des brosses à dents connectées. On modélise le bénéfice en euro pour x centaines de brosses à dents fabriquées et vendues par semaine par la fonction B définie sur $[0;9]$ par :

$$B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1\,917x - 200$$

La courbe représentative du bénéfice hebdomadaire est donnée ci-dessous.



1. Justifier que la fonction B est dérivable sur $[0;9]$ et déterminer l'expression de $B'(x)$.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;9]$.
3. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[8;8,5]$.
4. Déterminer graphiquement une valeur approchée de α à 25 unités près.
5. On donne ci-dessous un programme `Python`, dont la fonction `dicho` permet de déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à un réel strictement positif `epsilon`.

```python
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

def dicho(epsilon):
    gauche = 8
    droite = 8.5
    while droite - gauche > epsilon:
        milieu = (gauche + droite) / 2
        if B(milieu) <= 0:
            gauche = milieu
        else:
            droite = milieu
        print(gauche, milieu, droite)
    return [gauche, droite]
```

On évalue `dicho(0.01)`. Complétez à chaque passage en ligne 13 de la boucle, les valeurs de `gauche`, `milieu`, `droite` et `droite-gauche` dans le tableau ci-dessous.

	ligne 6	ligne 13	ligne 13	ligne 13	ligne 13	ligne 13	ligne 13	...
`gauche`	$\emptyset$	$8,25$						
`milieu`	8	$8,25$						
`droite`	$8,5$	$8,5$						
`droite-gauche`	$0,5$	$0,25$						

6. En déduire une approximation à l'unité près du nombre minimal de brosses à dents connectés que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice, si sa production hebdomadaire est comprise entre 800 et 850 unités.

Table des matières

1 Continuité d'une fonction **1**
1.1 Continuité locale 1
1.2 Continuité globale 1

2 Continuité et suites **3**
2.1 Image d'une suite par une fonction 3
2.2 Image d'une suite convergente par une fonction continue 3
2.3 Étude d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ 3

3 Théorème des valeurs intermédiaires **6**
3.1 Le théorème des valeurs intermédiaires 6
3.2 Fonction strictement monotone 7
3.3 Corollaires du TVI 8
3.4 Recherche d'une solution approchée d'une équation par dichotomie 10