

1 Révisions de première

Exercice 1 Probabilités conditionnelles et loi des probabilités totales

Une professeure pose une question à un élève et elle lui demande de choisir parmi trois réponses possibles, une seule étant juste. L'élève ne connaît que 60% de son cours.

- Si la question est dans la partie du cours qu'il connaît, alors il répond juste ;
- Sinon il choisit au hasard sa réponse parmi les trois proposées.

On définit les événements :

- C : « La question fait partie du cours que l'élève connaît. »
- J : « L'élève répond juste à la question »

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. En utilisant l'énoncé, déterminer $\mathbb{P}_C(J)$ puis $\mathbb{P}_{\bar{C}}(J)$.
3. Exprimer $\mathbb{P}(J)$ en fonction de $\mathbb{P}_C(J)$ et $\mathbb{P}_{\bar{C}}(J)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(J)$.

Exercice 2 Calculs de probabilités pour une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $-\frac{3}{2}$, 0, 3 et 3. On suppose que :

$$\mathbb{P}\left(X = -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{10} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{5} \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{5}$$

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X = 3)$
2. $\mathbb{P}(X \leq 1)$
3. $\mathbb{P}(X \geq 3)$
4. $\mathbb{P}(X < 0)$

Exercice 3 Calculs d'espérance et de variance

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	1/10	1/5	1/2	1/10	1/10

Déterminer :

1. $\mathbb{P}(X \leq 0)$
2. $\mathbb{P}(X < 2)$
3. $\mathbb{E}(X)$
4. $\mathbb{V}(X)$

2 Loi binomiale

Exercice 4 Centres-Étrangers G1 mars 2023

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état. Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

Exercice 5 Métropole Septembre 2023 J1

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 6 Métropole Septembre 2023 J2

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.

On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.

1. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.
 - b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.
 - c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.
2. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
- Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 7 *Amérique du Nord mai 2024 J1*

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers. Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Exercice 8 *Déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α ou supérieure à $1 - \alpha$*

Une étude statistique a permis d'établir que 6% des DVD proposés à l'emprunt dans les médiathèques d'une ville sont défectueux.

Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de DVD défectueux sur cet échantillon.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X .

2. On admet qu'on dispose de la fonction `binompdf(n, p, k)` définie dans la capacité 9 qui retourne $\mathbb{P}(X = k)$ si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

a. Compléter la fonction `borne_inf` ci-dessous pour que `borne_inf()` représente le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) > 0,025$.

```
def borne_inf():
    a = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ..... 0.025:
        a = a + 1
        probacum = .....
    return a
```

b. Compléter la fonction `borne_sup` ci-dessous pour que `borne_sup()` représente le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 0,975$.

```
def borne_sup():
    b = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ..... 0.975:
        b = b + 1
        probacum = .....
    return b
```

c. Déterminer les valeurs de a et b en faisant un tableau de valeurs des probabilités cumulées $\mathbb{P}(X \leq k)$ (voir p. 373 du manuel Indice). En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geq 0,95$.

d. On veut tester l'hypothèse que la proportion de DVD défectueux dans la médiathèque est de $p = 0,06$. Après avoir déterminé l'intervalle de fluctuation J (calculé à partie de I) au seuil de 95% de la fréquence de DVD défectueux sur un échantillon quelconque de taille 150 et mesuré la fréquence f de DVD défectueux sur l'échantillon prélevé, on applique cette règle de décision :

- si $f \in I$, on rejette l'hypothèse que $p = 0,06$;
- sinon on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.

Sur l'échantillon, on détecte 14 DVD défectueux. Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux?