1 Révisions de première

Exercice 1 *Probabilités conditionnelles et loi des probabilités totales*

Une professeure pose une question à un élève et elle lui demande de choisir parmi trois réponses possibles, une seule étant juste. L'élève ne connaît que 60% de son cours.

- Si la question est dans la partie du cours qu'il connaît, alors il répond juste;
- Sinon il choisit au hasard sa réponse parmi les trois proposées.

On définit les événements :

- C : « La question fait partie du cours que l'élève connaît. »
- J : « L'élève répond juste à la question »

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. En utilisant l'énoncé, déterminer $\mathbb{P}_C(J)$ puis $\mathbb{P}_{\overline{C}}(J)$.
3. Exprimer $\mathbb{P}(J)$ en fonction de $\mathbb{P}_C(J)$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(J)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(J)$.

Exercice 2 *Calculs de probabilités pour une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $-\dfrac{3}{2}$, 0, 3 et 3. On suppose que :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{X}=-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{10} \qquad \mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{5} \qquad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{5}$$

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(\mathrm{X}=3)$
2. $\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant 1)$
3. $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant 3)$
4. $\mathbb{P}(\mathrm{X}<0)$

Exercice 3 *Calculs d'espérance et de variance*

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$	1/10	1/5	1/2	1/10	1/10

Déterminer :

1. $\mathbb{P}(\mathrm{X}\leqslant 0)$
2. $\mathbb{P}(\mathrm{X}<2)$
3. $\mathbb{E}(\mathrm{X})$
4. $\mathbb{V}(\mathrm{X})$

2 Loi binomiale

Exercice 4 *Centres-Étrangers G1 mars 2023*

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.
Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

Exercice 5 *Métropole Septembre 2023 J1*

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0,08$.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

   Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 6 *Métropole Septembre 2023 J2*

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.
On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée.

1. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

   On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

2. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 7 *Amérique du Nord mai 2024 J1*

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». La probabilité de tirer un objet rare est de $0,07$.
Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.

3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Exercice 8 *Déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α ou supérieure à $1-\alpha$*

Une étude statistique a permis d'établir que 6% des DVD proposés à l'emprunt dans les médiathèques d'une ville sont défectueux.
Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de DVD défectueux sur cet échantillon.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

2. On admet qu'on dispose de la fonction `binompdf(n,p,k)` définie dans la capacité 9 qui retourne $\mathbb{P}\big(X = k\big)$ si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

a. Compléter la fonction `borne_inf` ci-dessous pour que `borne_inf()` représente le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}\big(X \leqslant a\big) > 0,025$.

```
def borne_inf():
    a = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ...... 0.025:
        a = a + 1
        probacum = ................
    return a
```

b. Compléter la fonction `borne_sup` ci-dessous pour que `borne_sup()` représente le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}\big(X \leqslant b\big) \geqslant 0,975$.

```
def borne_sup():
    b = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ...... 0.975:
        b = b + 1
        probacum = ................
    return b
```

c. Déterminer les valeurs de a et b en faisant un tableau de valeurs des probabilités cumulées $\mathbb{P}\big(X \leqslant k\big)$ (voir p. 373 du manuel Indice). En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0,95$.

d. On veut tester l'hypothèse que la proportion de DVD défectueux dans la médiathèque est de $p = 0,06$. Après avoir déterminé l'intervalle de fluctuation J (calculé à partie de I) au seuil de 95% de la fréquence de DVD défectueux sur un échantillon quelconque de taille 150 et mesuré la fréquence f de DVD défectueux sur l'échantillon prélevé, on applique cette règle de décision :

- si $f \in$ I, on rejette l'hypothèse que $p = 0,06$;
- sinon on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.

Sur l'échantillon, on détecte 14 DVD défectueux. Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux?

Corrections

Exercice 4

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Etranger_spe_1_13_mars_2023_FK.pdf

1. Ici, nous avons :
   - une expérience à deux issues (choisir une trottinette dans le parc de l'entreprise), le succès est « choisir une trottinette en bon état », de probabilité $p = 0,8$;
   - cette expérience est répétée quinze fois (on constitue un lot de 15 trottinettes) d'une façon assimilable à une répétition identique et indépendante (le prélèvement des 15 trottinettes est assimilable à un tirage avec remise), donc $n = 15$ répétitions ;
   - dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de trottinettes en bon état dans le lot).

   Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(15\ ;\ 0,8)$.

2. La probabilité demandée est $P(X = 15)$. Par propriété, on a :

   $P(X = 15) = \binom{15}{15} \times 0,8^{15} \times 0,2^{0} = 0,8^{15}$.

   La probabilité que les quinze trottinettes soient en bon état est donc de $0,8^{15}$ (ici, le sujet ne précise pas de consigne d'arrondi, donc on donne la valeur exacte. La valeur approchée au dix-millième près est 0,0352).

3. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 10)$.

   Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou alors on a recours à : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leqslant 9)$.

   La calculatrice donne une valeur approchée au dix-millième près qui est 0,9389.

4. Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale, on a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$ (cette justification n'était pas attendue, ici).

   Cela s'interprète en disant qu'en moyenne, sur un lot de quinze trottinettes choisies dans le parc de cette entreprise, douze d'entre elles seront en bon état.

Exercice 5

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_J1_spe_11_sept_2023_DV.pdf

1. Les tirages successifs étant indépendants et chaque personne ayant un probabilité d'être allergique égale à 0,08, X suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 150$ et $p = 0,08$.

2. La calculatrice donne $p(X = 20) \approx 0{,}008\,20$, soit 0,008 au millième près.

3. La calculatrice donne $p(X \leqslant 14) \approx 0{,}779\,7$, donc $p(X \geqslant 15) = 1 - p(X \leqslant 14) \approx 1 - 0{,}779\,7 \approx 0{,}220\,3$ soit 0,220 au millième près.

Exercice 6

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corr_Spe_Metropole_Reunion_12_sept_23_FH.pdf

1. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité $p = 0,02$) ou non ; il n'y a donc que deux issues.

On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille $n = 100$ en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$.

b. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est : $P(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0,02^3 \times (1 - 0,02)^{100-3} \approx 0,182$.

c. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est : $P(X \leqslant 3) \approx 0,859$ (résultat donné par la calculatrice).

2. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

C'est-à-dire : $1 - P(X = 0) \geqslant 0,99$ ou encore : $0,01 \geqslant P(X = 0)$.

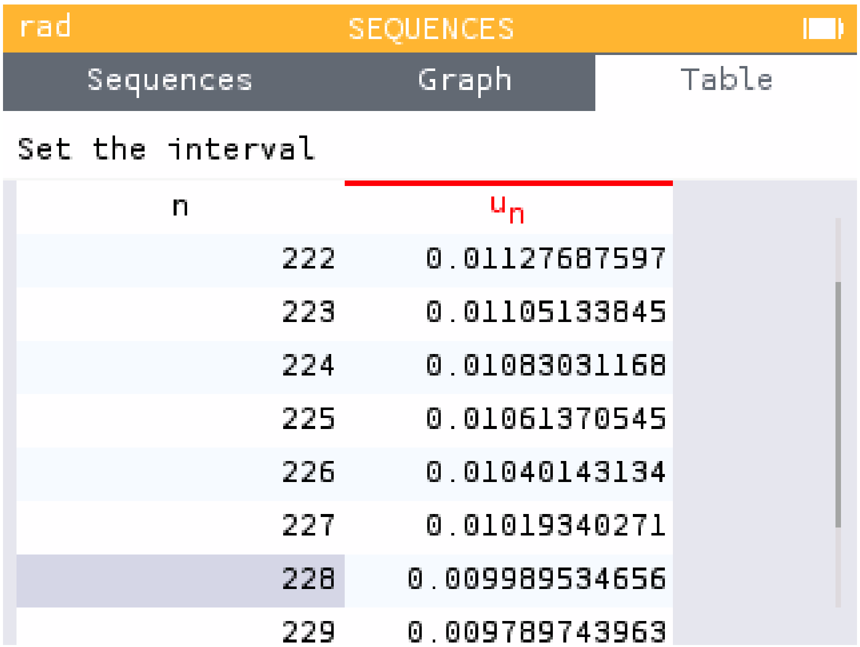
On résout l'inéquation : $P(X = 0) \leqslant 0,01$.

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,02^0 \times (1 - 0,02)^{n-0} = 0,98^n$$

On résout donc l'inéquation : $0,98^n \leqslant 0,01$.

On peut programmer un algorithme de seuil ou procéder par balayage avec la calculatrice puisque la suite $\left(0,98^n\right)$ est géométrique décroissante et convergente vers 0.

```python
def seuil():
    p = 1
    n = 0
    while p > 0.01:
        p = 0.98 * p
        n = n + 1
    return n
```



On trouve qu'il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 7

Source : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_spe_Amerique_Nord_J1_2024_DV.pdf

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.

L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.

2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0{,}983\,8$ soit 0,984 au millième près.

3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\quad p(X \geqslant k+1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice :

$p(X \geqslant 1+1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$, et $p(X \geqslant 2+1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.

Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

4. Soit Y la variable correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté N défis Il faut donc trouver Y tel que $p(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.

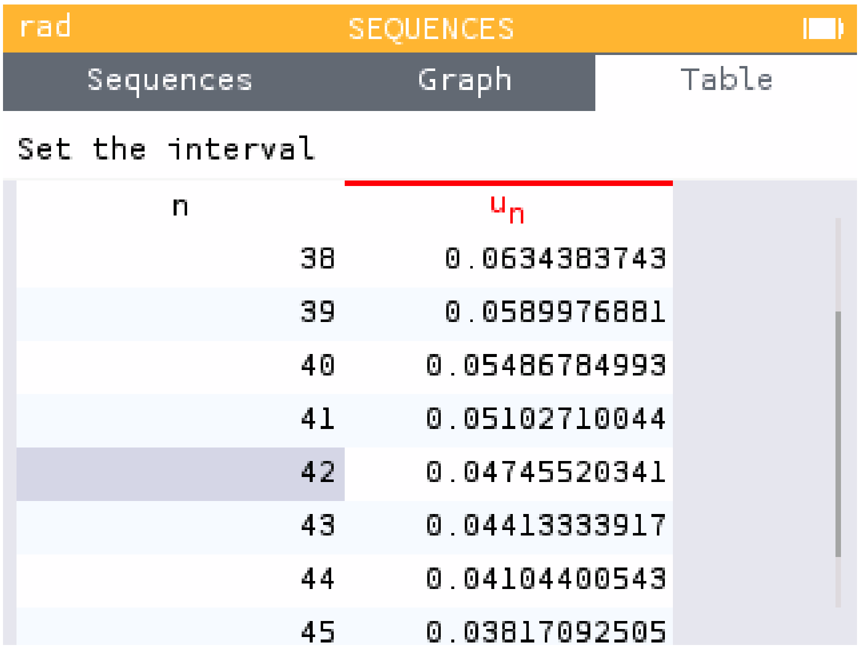
Or $p(X = 0) = \dbinom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$0,93^N \leqslant 0,05$

On peut programmer un algorithme de seuil ou procéder par balayage avec la calculatrice puisque la suite $\left(0,93^n\right)$ est géométrique décroissante et convergente vers 0.

```python
def seuil():
    p = 1
    n = 0
    while p > 0.05:
        p = 0.93 * p
        n = n + 1
    return n
```


rad SEQUENCES

Sequences Graph Table

Set the interval

n	u_n
38	0.0634383743
39	0.0589976881
40	0.05486784993
41	0.05102710044
42	0.04745520341
43	0.04413333917
44	0.04104400543
45	0.03817092505

Conclusion : il faut que $N \geqslant 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

型 seuil_capacite9()
9

Capacité 10 ***Déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α ou supérieure à $1-\alpha$***

Une étude statistique a permis d'établir que 6% des DVD proposés à l'emprunt dans les médiathèques d'une ville sont défectueux.
Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de DVD défectueux sur cet échantillon.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

1) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,06$

2. On admet qu'on dispose de la fonction `binompdf(n,p,k)` définie dans la capacité 9 qui retourne $\mathbb{P}(X = k)$ si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

a. Compléter la fonction `borne_inf` ci-dessous pour que `borne_inf()` représente le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0,025$.

```
def borne_inf():
    a = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ...... 0.025:
        a = a + 1
        probacum = ................
    return a
```

b. Compléter la fonction `borne_sup` ci-dessous pour que `borne_sup()` représente le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

```
def borne_sup():
    b = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum ...... 0.975:
        b = b + 1
```



```
        probacum = ................
    return b
```

c. Déterminer les valeurs de a et b en faisant un tableau de valeurs des probabilités cumulées $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ (voir p. 373 du manuel Indice). En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0,95$.

```
# Capacité 10

def borne_inf():
    a = 0
    probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
    while probacum  <= 0.025:
        a = a + 1
        probacum = probacum  + binompdf(150, 0.06, a)
    return a


def borne_sup():
  b = 0
  probacum = binompdf(150, 0.06, 0)
  while probacum  < 0.975:
      b = b + 1
      probacum = probacum  + binompdf(150, 0.06, b)
  return b
```

```
型 borne_inf()
4
型 borne_sup()
15
```

c. Déterminer les valeurs de a et b en faisant un tableau de valeurs des probabilités cumulées $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ (voir p. 373 du manuel Indice). En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0,95$.

d. On veut tester l'hypothèse que la proportion de DVD défectueux dans la médiathèque est de $p = 0,06$. Après avoir déterminé l'intervalle de fluctuation J au seuil de 95% de la fréquence de DVD défectueux sur un échantillon quelconque de taille 150 et mesuré la fréquence f de DVD défectueux sur l'échantillon prélevé, on applique cette règle de décision :

- si $f \in$ I, on ~~rejette~~ accepte l'hypothèse que $p = 0,06$;
- sinon on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.

Sur l'échantillon, on détecte 14 DVD défectueux. Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6 % des DVD sont défectueux?

c) D'après l'exécution des fonctions borne_inf() et borne_sup(), on a :
$a = 4$ et $b = 15$

$I = [4 ; 15]$ tel que $P(X \in I) \geq 0,95$

car $P(X \notin I) = P(X \leq a) + P(X > b)$
avec $P(X < a) \leq 0,025$ et $P(X > b) \leq 0,025$

donc $P(X \notin I) \leq 0,05$

d) $f = \frac{14}{150}$ est la fréquence de DVD défectueux mesurée sur l'échantillon.

L'intervalle de fluctuation des fréquences mesurées sur l'échantillon au seuil de 95% est :

$$J = \left[\frac{4}{150} ; \frac{15}{150}\right]$$

$f \in I$ donc on accepte l'hypothèse que 5 % des DVD sont défectueux.