Exercice 1 *Étude de la fonction tangente*

On rappelle que la fonction tangente est définie sur la réunion des intervalles $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec k parcourant l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

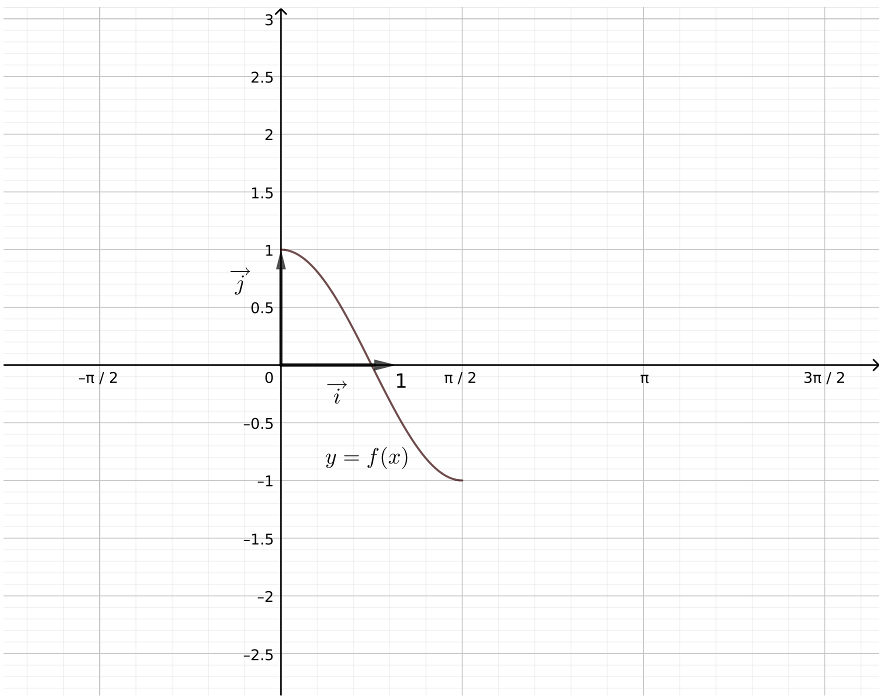
1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in I_k$, montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$.

3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 2 *Étude d'une fonction trigonométrique*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
On a représenté ci-dessous dans un repère orthogonal du plan, une partie de la courbe de f, sur l'intervalle $\left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$.



1. Résolution d'une équation.

a. Démontrer que pour tout réel x, on a $f(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

b. En déduire la résolution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Étude des variations de f sur $\left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Soit x un réel, donner une expression de $f'(x)$.

b. Déterminer les variations de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Étude des propriétés de la fonction f.

a. Soit x un réel, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?

b. Soit x un réel, comparer $f(x+\pi)$ et $f(x)$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?

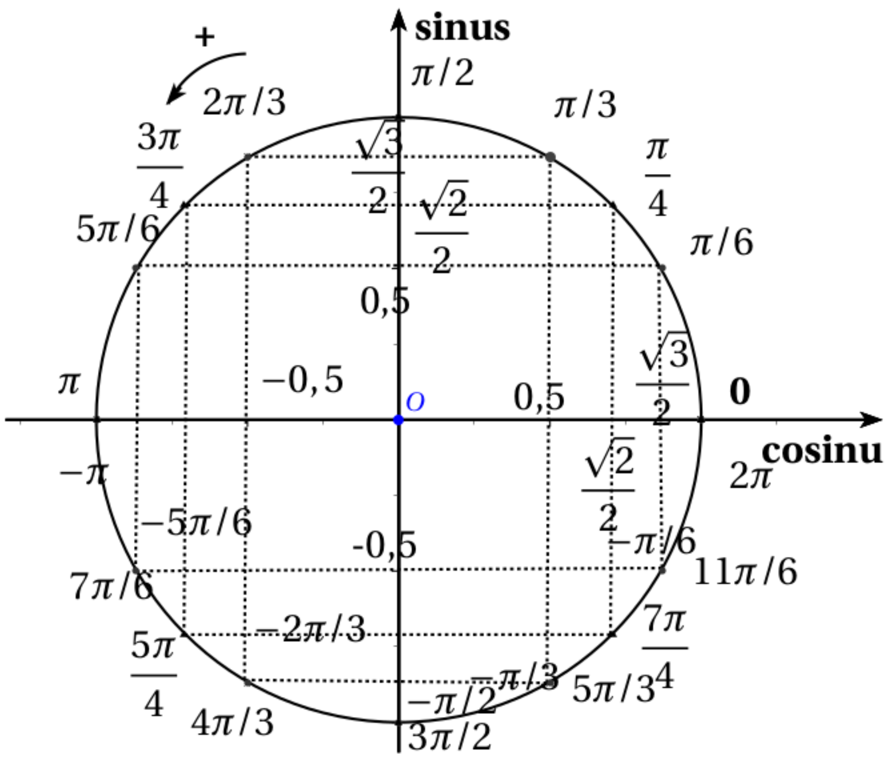
c. Compléter le graphique avec le tracé de la courbe de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$. Quelles transformation géométriques ont été utilisées dans la construction ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par :

$f(x) = 2\sin(x) - 2\sin^2(x) + x + 2\cos(x)$

f est dérivable par règles opératoires et on note f' sa fonction dérivée.



1. Démontrer que pour tout réel $x \in [-\pi\,;\,\pi]$, on a :

$$f'(x) = (2\cos(x)+1)(1-2\sin(x))$$

2. **a.** Représenter en rouge sur le cercle trigonométrique ci-dessus l'ensemble des points images de réels x vérifiant $2\cos(x)+1 \geqslant 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions dans $[-\pi\,;\,\pi]$ de l'inéquation $2\cos(x)+1 \geqslant 0$.

3. **a.** Représenter en bleu sur le cercle trigonométrique ci-dessus l'ensemble des points images de réels x vérifiant $1-2\sin(x) \geqslant 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions dans $[-\pi\,;\,\pi]$ de l'inéquation $1-2\sin(x) \geqslant 0$.

4. Déterminer le tableau de variations de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.