Certains exercices sont inspirés du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid https://colasbd.github.io/cdc-lycee/.

Exercice 1 *Signe du logarithme népérien* ☆

Déterminer le signe de chacune des expressions suivantes :

1. $\ln(2)$
2. $\ln(0,99)$
3. $(\ln(0,6))^2$
4. $\ln(0,6^2)$
5. $\ln(3)-1$
6. $\ln(1-\ln(0,1))$
7. $\ln(\ln(2))$
8. $\ln(-\ln(1/3))$

Exercice 2 *Équations* ☆

1. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel l'expression $\ln(1-\ln(x))$ est définie.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'équation $\ln(1-\ln(x)) = \ln(3)$.
2. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel l'expression $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right)$ est définie.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'équation $\ln\left(\dfrac{x+1}{3x-5}\right) = 0$.
3. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel l'expression $(\ln(x))^2 - \ln(x)$ est définie.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'équation $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 6$.

Exercice 3 *Inéquations* ☆ ☆

1. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel l'expression $\ln(x^2)$ est définie.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'inéquation $\ln(x^2) \geqslant 0$.
2. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel l'expression $\ln(3x+5)$ est définie.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'inéquation $0 \leqslant \ln(3x+5) \leqslant 4$.
3. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel les expressions $\ln(x+4)$ et $\ln(3x-1)$ sont définies.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'inéquation $\ln(x+4) > \ln(3x-1)$.
4. **a.** Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel les expressions $\ln(x)$ et $\ln(x+3)$ sont définies.
   b. Résoudre dans $\mathscr{D}$ l'inéquation $\ln(x) + \ln(x+3) < \ln(2)$.

Exercice 4 *Étude d'une suite* ☆ ☆

On peut démontrer par récurrence qu'il existe une suite (u_n) définie par $u_0 = \mathrm{e}^2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{eu_n}$. On peut alors définir la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 1$.

1. Démonter que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Étudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 *Dérivation* ☆ ☆

Dans chaque cas, f est une fonction dérivable sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ (sauf mention particulière) et note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.

1. $f : x \mapsto 3x + 1 - \ln(x)$
2. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
4. $f : x \mapsto (\ln(x))^4$
5. $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln(x))^5}$

Exercice 6 *Dérivation* ☆☆

Dans chaque cas, f est une fonction dérivable sur I et note f' sa fonction dérivée. Déterminer une expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.

1. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 4)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{-2x} + 3)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \ln(1 - x^2)$ sur $\mathrm{I} =]-1\,;\,1[$.
4. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $\mathrm{I} =]1\,;\,+\infty[$.
5. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x^2-1}\right)$ sur $\mathrm{I} =]2\,;\,+\infty[$
6. $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Exercice 7 *Équation différentielle* ☆☆☆

Soit f une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$, telle que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(E)\ :\ f'(x) = f(x)\left(1 - \ln(f(x))\right)$$

1. On pose $g = \ln(f)$. Déterminer une équation différentielle (E') équivalente à (E) mais reliant g et g'.
2. Résoudre (E') et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 8 *Somme télescopique* ☆☆☆

1. Soit un entier $k \geqslant 2$, écrire $1 - \dfrac{1}{k}$ sous la forme d'une fraction.
2. Soit un entier $k \geqslant 2$, écrire $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ sous la forme d'une somme ou d'une différence de logarithmes.
3. Soit un entier $n \geqslant 2$. Simplifier la somme :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 9 *Asie juin 2024 J2* ☆☆☆

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.

   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.

   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge.

   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 10 *Métropole juin 2024 J2* ☆☆☆

Partie A : étude d'une fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

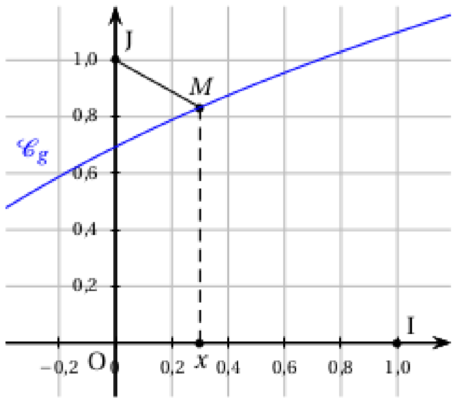
1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
6. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.
7. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie B : une distance minimale

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+2).$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, représentée ci- contre.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \text{J}M^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2)-1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
   - **a.** Démontrer que pour tout réel $x > -2$,
   $$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$
   où f est la fonction étudiée en partie A.
   - **b.** Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
   - **c.** En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 5 de la partie A.
3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.
   - **a.** Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   - **b.** En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite $(\text{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.