Certains exercices sont inspirés du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid : https://colasbd.github.io/cdc-lycee/. Les extraits d'annales sont tirés des sujets collectés sur le site de https://www.apmep.fr/.

1 Calculs d'intégrales

Exercice 1 *Intégrale d'une fonction usuelle* ★

Calculer les intégrales suivantes en déterminant d'abord une primitive de la fonction sous le signe d'intégration.

1. $\displaystyle\int_0^2 \pi \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 x \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x) \,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x) \,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x) \,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$

Exercice 2 *Intégrales avec paramètres* ★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exprimer en fonction de n les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^n} \,\mathrm{d}t$

Exercice 3 *Intégrale d'une somme* ★

Calculer les intégrales suivantes en déterminant d'abord une primitive de la fonction sous le signe d'intégration.

1. $\displaystyle\int_{-2}^1 3x^2 - 5x + 1 \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4}{3} + \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{-2x+1} \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \,\mathrm{d}x$

Exercice 4 *Intégrale d'une somme* ★★

Soit n un entier strictement positif, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^2 2t \,\mathrm{d}t + \int_0^2 3t^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^2 4t^3 \,\mathrm{d}t + \ldots + \int_0^2 (n+1)t^n \,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 *Intégrale d'une dérivée de fonction composée* ★★

Calculer les intégrales suivantes en déterminant d'abord une primitive de la fonction sous le signe d'intégration.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2} \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-2}^4 \frac{2t+1}{t^2+t+1} \,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\ln^3(x) \,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t\cos(t^2) \,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x) \,\mathrm{d}x$

Exercice 6 *Intégrales avec paramètres* ★★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exprimer en fonction de n les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t) \,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^n} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 *Calcul d'une intégrale par décomposition* ☆☆

1. a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ en remplaçant x par $(x+1)-1$ au numérateur.
   b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{x^2-2x}{\mathrm{e}^x+x^2}\,\mathrm{d}x$ en suivant la même méthode.
2. a. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $t \in \mathbb{R}-\{0;-1\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
   b. En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t$.
3.

Exercice 8 *Simple intégration par parties* ☆☆

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{10} (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^5 \ln(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^5 (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 9 *Double intégration par parties* ☆☆☆

1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties successives :
   a. $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
   b. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2(\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$
2. On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}t$
   a. À l'aide d'une première intégration par parties, démontrer que : $I = -1+J$.
   b. À l'aide d'une première intégration par parties, démontrer que : $J = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - I$.
   c. En déduire les valeurs exactes de I et J.

2 Propriétés de l'intégrale

Exercice 10 *Linéarité de l'intégrale et inégalités* ☆☆

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

1. a. Montrer que $v_0 + v_1 = 1$.

b. Calculer v_1 et en déduire que $v_0 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $v_n \geqslant 0$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} + v_n = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_n \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 11 *Suite d'intégrale* ☆

Déterminer le sens de variation de chacune des suites d'intégrales définies pour tout entier $n \geqslant 0$:

1. $I_n = \displaystyle\int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ **2.** $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$ **3.** $K_n = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x$ **4.** $L_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 12 *Calcul de volume* ☆ ☆

Métropole Septembre 2024 J1.
Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm **Figure 2**.

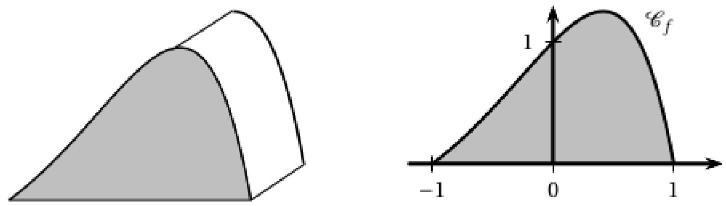

Figure 1 Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par : $f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^x$.
L'objectif est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 x\,\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm³, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par $\mathscr{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm², de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à 0,1 cm³ près, est égal à 4,4 cm³.

Exercice 13 *Encadrement d'une aire* ☆ ☆

Métropole juin 2024 J1.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le signe de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x + 0,25$$

En déduire l'encadrement : $1 \leqslant I \leqslant 2$.

3 Étude d'une suite d'intégrales

Exercice 14 *Amérique du Nord J1 mai 2024*

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.
   c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$.
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

   Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      ...
6          n = n+1
7          I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8      return n
```