De nombreux exercices sont inspirés du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid https://colasbd.github.io/cdc-lycee/.

1 Savoir faire fondamentaux

Exercice 1 *Équation cartésienne de plan* ☆☆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Les questions 1., 2, 3., 4. et 5. sont indépendantes.

1. On considère les plans $\mathscr{P}_1 : x+y+z+3=0$, $\mathscr{P}_2 : 2x-y+5=0$ et $\mathscr{P}_3 : x-2y+z-3=0$.

   Déterminer si les plans proposés sont perpendiculaires :

   a. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$; **b.** $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$; **c.** $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.

2. Dans chaque cas déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

   a. $A(2;5;6)$ et $\overrightarrow{n}(2;-1;2)$; **b.** $A(1;-2;3)$ et $\overrightarrow{n}(2;-1;2)$; **c.** $A(2;-4;5)$ et $\overrightarrow{n}(5;6;0)$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1;2;-3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On commencera par déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

   a. $\overrightarrow{u}(4;2;-2)$ et $\overrightarrow{v}(0;4;2)$; **b.** $\overrightarrow{u}(4;1;-5)$ et $\overrightarrow{v}(2;-2;-5)$; **c.** $\overrightarrow{u}(2;3;1)$ et $\overrightarrow{v}(4;8;3)$.

4. Déterminer une équation de la forme $ax+by+cz=1$ du plan passant par les points $A(1;0;1)$, $B(2;-1;0)$ et $C(3;-2;0)$.

5. Soit $A(2,1,-3)$ et $B(4,-1,-3)$. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ médiateur du segment $[AB]$, c'est-à-dire le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à (AB).

Exercice 2 *Intersections de plans et de droites* ☆☆

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Les questions 1. et 2 sont indépendantes.

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ définie par le point $A(1;2;-1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;-1;2)$.

   Déterminer dans chaque cas l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.

   a. $\mathscr{P} : x+y+2z=8$; **b.** $\mathscr{P} : 2x-z=4$; **c.** $\mathscr{P} : 2x-z=3$.

2. Dans chaque cas, justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puis caractériser leur droite d'intersection par un point et un vecteur directeur.

   a. $\mathscr{P}_1 : x=-1$ et $\mathscr{P}_2 : y=3$;
   b. $\mathscr{P}_1 : y+z=1$ et $\mathscr{P}_2 : y=-1$;
   c. $\mathscr{P}_1 : x+y-2z=6$ et $\mathscr{P}_2 : y+z=12$;
   d. $\mathscr{P}_1 : x+y-2z=6$ et $\mathscr{P}_2 : x-y+z=12$.

Exercice 3 *Équation d'une sphère* ☆

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Justifier qu'une équation de la sphère de centre $\Omega(1;2;3)$ et de rayon 7 est : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=35$.

2 Classiques du bac

2.1 Distance d'un point à une droite ou d'un point à un plan

Exercice 4 *Métropole mars 2023 J2* ☆☆☆

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+y-z+2=0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point $\text{B}(1\,;1\,;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& -2+t\\ z &=& t\end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}.$

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

On considère le point $\text{A}(1\,;1\,;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2+t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $\text{A}M_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

b. En déduire que $\text{AH}=\sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

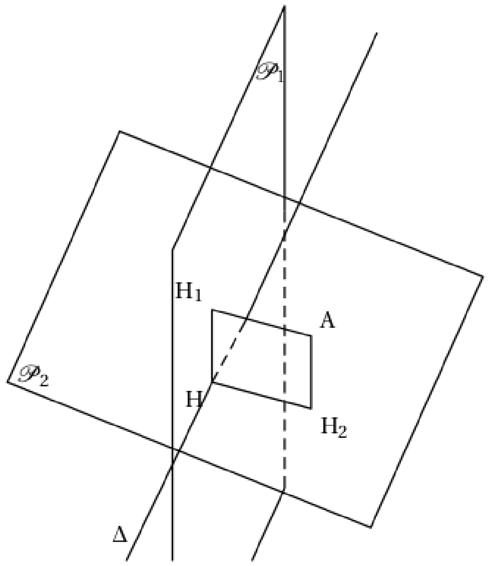
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;0\,;2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



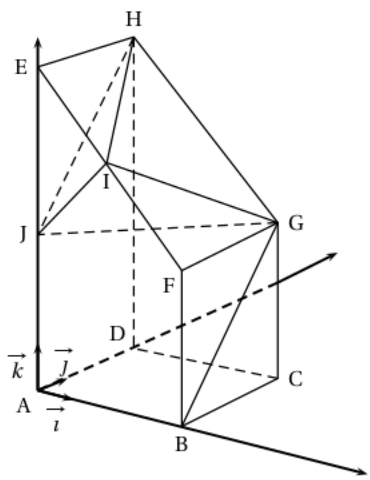
2.2 Distance d'un point à un plan et volume d'un tétraèdre

Exercice 5 *Centre-Étrangers mars 2023 J1* ☆ ☆

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,,\quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\,,\quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}\,.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

  a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).

  b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \times$ (aire de la base) $\times$ hauteur.

2.3 Perpendiculaire commune

Exercice 6 *Polynésie mars 2023 J1* ☆☆

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2k-3 \\ y & = & k \\ z & = & 5 \end{array}\right.$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite d_2.
   b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

2. **a.** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

   b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
   On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :
   $$5x+4y-z-22=0.$$
   Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point M(3 ; 3 ; 5).

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ passant par le point M.

   Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -r+3 \\ y & = & 2r+3 \\ z & = & 3r+5 \end{array}\right.$ où r décrit $\mathbb{R}$.

   a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.