

Ces exercices sont extraits du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid :

<https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>

Exercice 1 ★ Principe additif

On rappelle la formule du crible pour les cardinaux d'ensembles finis :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

1. On suppose $\text{card}(A) = 5$, $\text{card}(B) = 11$ et $\text{card}(A \cap B) = 3$. Déterminer $\text{card}(A \cup B)$.
2. On suppose que $\text{card}(B) = 2\text{card}(A)$, que $\text{card}(A \cap B) = 3$ et $\text{card}(A \cup B) = 9$. Déterminer $\text{card}(B)$.

Exercice 2 ★ ★ Principe multiplicatif

1. Les aérodomes de loisir sont identifiés par un code à quatre lettres. La première lettre indique la région du monde et la deuxième le pays.

Déterminer le nombre d'aérodomes qu'on peut identifier :

- a. Si toutes les lettres de l'alphabet peuvent être utilisées.
 - b. En Europe (la première lettre serait alors « E »).
 - c. En France (la deuxième lettre doit être « F »).
2. Un groupe de huit amis part en week-end. Déterminer le nombre de façons de choisir un responsable de la vaisselle, un responsable du rangement et un responsable du ménage.
 - a. Si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions.
 - b. Si un même membre peut cumuler plusieurs fonctions.
 - c. Si un même membre ne peut cumuler que deux fonctions.

3. On s'intéresse aux anagrammes du mot CUBES, qu'elles aient un sens ou non.

Déterminer le nombre d'anagrammes qu'on peut former :

- a. En tout.
 - b. Si l'on commence par les voyelles.
 - c. Si le mot se termine par un U.
 - d. Si l'on souhaite qu'il y ait alternance entre les voyelles et les consonnes.
4. Un cadenas est sécurisé par un code à quatre chiffres. Déterminer le nombre de codes.
 - a. En tout.
 - b. Avec des chiffres tous différents.
 - c. Avec des chiffres impairs uniquement.
 - d. Se terminant par le chiffre 7
 - e. Avec des chiffres tous distincts et rangés dans l'ordre décroissant.

Exercice 3 ★ ★ Factorielles

On rappelle que pour tout entier naturel n , on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

1. Soit n un entier naturel supérieur à 2, simplifier les expressions suivantes :

a. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$;

b. $\frac{(2n+3)!}{(2n)!}$;

c. $\frac{(n^2-1)n!}{(n+1)!}$.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

b. En déduire le sens de variation de la suite u .

3. Soit n un entier naturel non nul, exprimer en fonction d'une puissance de 2 et d'une factorielle, le produit P des entiers pairs successifs de 2 à $2n$:

$$P = \prod_{k=1}^n 2k = 2 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times 2n$$

Exercice 4 ★ Coefficients binomiaux

1. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale. Les autres spécialités choisies par les élèves de son groupe sont :

- la spécialité NSI pour 20;
- la spécialité physique-chimie pour 10;
- la spécialité SVT pour 1.

La professeure a besoin d'un groupe de 5 élèves pour participer à un concours de vidéos sur le thème des Mathématiques.

- Combien de groupes de 5 élèves peut-elle constituer?
- Combien de groupes de 5 élèves comportant au moins un élève de spécialité physique-chimie peut-elle constituer?
- Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité NSI. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe?

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Simplifier les expressions suivantes :

a. $\binom{n}{2} + \binom{n}{n-2}$;

b. $\binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-2}$;

c. $\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1}$;

d. $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 5 ★★★ Coefficients binomiaux

Le poker se joue avec 52 cartes, composé des cartes de 1 à 10, puis des figures (valet, dame, roi), dans les quatre couleurs (coeur, carreau, pique, trèfle).

Une main est constituée de cinq cartes. Déterminer le nombre de mains contenant :

- Cinq cartes quelconques;
- Cinq cartes de la même couleur;
- Exactement un trèfle;
- Au moins un roi;
- Deux trèfles, un carreau et deux coeurs;
- Trois rois et deux as;
- Un full (trois cartes identiques et deux autres cartes identiques).