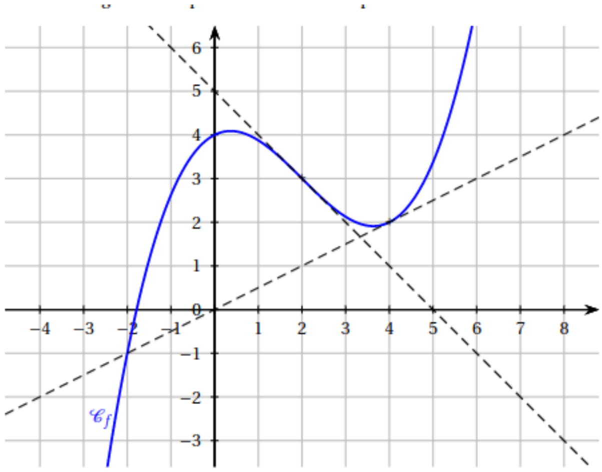
Exercice 1 *Convexité et courbe de la fonction* ☆

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

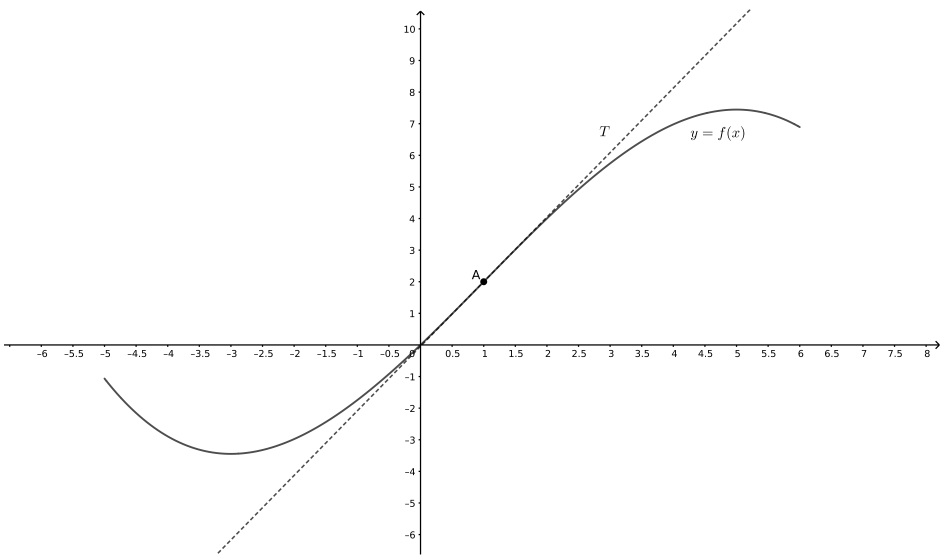


Parmi les affirmations suivantes, sélectionner celle qui est cohérente avec le graphique :

- **Affirmation 1 :** f est convexe sur $]-\infty\,;0,5]$, concave sur $[0,5\,;3,5]$ puis convexe sur $[3,5\,;+\infty[$.
- **Affirmation 2 :** f est convexe sur $]-\infty\,;2]$ et concave sur $[2\,;+\infty[$.
- **Affirmation 3 :** f est concave sur $]-\infty\,;2]$ et convexe sur $[2\,;+\infty[$.

Exercice 2 *Convexité et courbe de la dérivée* ☆

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-5\,;6]$ dont on donne la courbe représentative avec sa tangente T au point A d'abscisse 1.



1. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle concave ?
2. Proposer un tableau de variation de la fonction dérivée f' de f qui est compatible avec le graphique ci-dessus.

Exercice 3 *Convexité et dérivée seconde* ☆

Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ telle que pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3$$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Démontrer que pour tout réel $x \in [-2\,;\,4]$, on a :

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}$$

2. On note f'' la fonction dérivée de f'. Démontrer que pour tout réel $x \in [-2\,;\,4]$, on a :

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}$$

3. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ et en déduire plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 4 *Centres-Étrangers juin 2024 J1* ☆ ☆

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$