Exercice 1 *Tableau de variation et TVI* ☆

On considère une fonction g définie et continue sur l'intervalle $]-8\,;\,10[$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous :

x	-8		-2		3		10
$g(x)$	‖ 10	↘	-4	↗	5	↘	4 ‖

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 6$ possède une unique solution sur l'intervalle $]-8\,;\,-2[$.

2. Compléter le tableau ci-dessous sans justifier.

m	-5	-4	4	$4,5$	5	6	10	12
Nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$	...	...	...	...	...	...	...	...

Exercice 2 *Corollaire du TVI* ☆

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Exercice 3 *Résolution d'inéquation et TVI* ☆

Dans le cadre d'un essai clinique on étudie un protocole de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ce protocole, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Le protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. **a.** Démontrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α.

   b. Déterminer par balayage avec la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

   On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.

   c. Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Exercice 4 *Polynésie Septembre 2023 J1* ☆☆

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

   c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

   d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Exercice 5 *TVI théorème d'existence* ☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *Suite définie implicitement* ☆☆☆

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\sqrt{x}}{n}$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0\,;\,+\infty[$ et que $0 < \alpha_n < 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.
3. Montrer que la suite (α_n) est croissante et convergente.
4. Déterminer la limite de cette suite.

Corrections de l'APMEP https://www.apmep.fr/.

Exercice 3 *Résolution d'inéquation et TVI*

Métropole mai 2022.

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.

   Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.

   $u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$
   donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.

   Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.

   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

   D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

   c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).

   $l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
   $= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

   b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

   c. $u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$

   $\iff \ln\left(0,7^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$

   Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.
   Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7^e^ qui correspond à u_6).

Exercice 4 *Résolution d'inéquation et TVI* ☆

Polynésie Septembre 2023.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = -\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + x$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x$ donc

$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} + 1 = \left(-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + 1$, et donc

$f''(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x} + \left(-x+\frac{1}{2}\right)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = \left(x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Le signe de f'' donne les variations de f'.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x-\frac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \frac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante;
- Si $x > \frac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante;
- Si $x = \frac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

c. La fonction f' admet pour minimum

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

e. On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx -2,36 < 0 \\ f(0) = 0,5 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-1\,;\,0]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0,3) \approx -0,03 < 0 \\ f(-0,2) \approx 0,17 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,3\,;\,-0,2]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0,29) \approx -0,009 < 0 \\ f(-0,28) \approx 0,011 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,29\,;\,-0,28]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0,286) \approx -0,001 < 0 \\ f(-0,285) \approx 0,000\,9 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,286\,;\,-0,285]$$

Donc $-0,285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.