Exercice 1

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

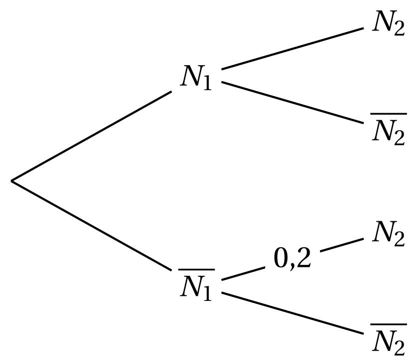
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

   a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est $0,2$.

   b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2

   Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.

2. a. Compléter le programme ci-dessous pour que `seuil()` renvoie le plus petit entier n tel que $1 - 0,72^n \geqslant 0,9$.

```
def seuil():
    p = 1
    n = n + 1
    while p > 0.1:
        p = ...
        n = n + 1
    return n
```

b. Par balayage avec la calculatrice déterminer le plus petit entier n tel que $1-0,72^n \geqslant 0,9$.

c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?

2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?

3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est- elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = u_n - 3n + 2$.

1. Calculer la valeur exacte de u_8 avec le mode suite de la calculatrice.

   Pour la suite de l'exercice on admet que $u_8 \leqslant -64$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 8$ on a $u_n \leqslant -n^2$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).