
Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :

$$A(0; 4; -1), \quad B(-2; 4; -5), \quad C(1; 1; -5), \quad D(1; 0; -4), \quad E(-1; 2; -3);$$

- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -3 + k \\ y = k \\ z = -5 + k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x + 2z + 7 = 0$.

- Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}_1$ au plan $\mathcal{P}_1$.
 - Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que I appartient au plan $\mathcal{P}_1$.
 - Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.
- Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x - y + d = 0$, où d désigne un réel.
 - Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}_2$ au plan $\mathcal{P}_2$.
 - Soit J le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -5\right)$.
Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathcal{P}_2$. Justifier la réponse.
- Donner les coordonnées du vecteur $\vec{CD}$.
 - Calculer les coordonnées du milieu K du segment [CD].
 - Soit $\mathcal{P}_3$ le plan passant par K et orthogonal à la droite (CD).
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$. Justifier la réponse.
- Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.
 - Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathcal{D}$.
 - Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E.
- Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{EA}$, $\vec{EB}$, $\vec{EC}$ et $\vec{ED}$.
- Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.
- En déduire que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R . Justifier la réponse.
- Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.