Exercice 1

Dans tout le problème, si h est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note h' sa fonction dérivée et h'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle avec condition initiale définie par le système $(\mathscr{S}_1)$:

$$(\mathscr{S}_1)\begin{cases}\forall x \in \mathbb{R},\ -2f'(x)+2=\mathrm{e}^{f(x)}\\ f(0)=0\end{cases}$$

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution du système $(\mathscr{S}_1)$, on définit la fonction g telle que pour tout réel x :

$$g(x)=\mathrm{e}^{-f(x)}$$

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est solution du système $(\mathscr{S}_1)$ si et seulement si g est solution du système $(\mathscr{S}_2)$:

$$(\mathscr{S}_2)\begin{cases}\forall x \in \mathbb{R},\ 2g'(x)+2g(x)=1\\ g(0)=1\end{cases}$$

3. Résoudre l'équation différentielle $2y'+2y=1$ où y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire qu'il existe une unique fonction g solution de $(\mathscr{S}_2)$ et déterminer son expression.
5. Conclure qu'il existe une unique fonction f solution de $(\mathscr{S}_1)$ et que pour tout réel x, on a :

$$f(x)=\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$$

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :

$$f(x)=\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$$

4. Dresser le tableau de variation complet de f.
5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
6. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x)\leqslant \frac{1}{2}x$.

Exercice 2

On considère la fonction f d'expression $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

1. Justifier qu'on peut définir f sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que f est impaire.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.