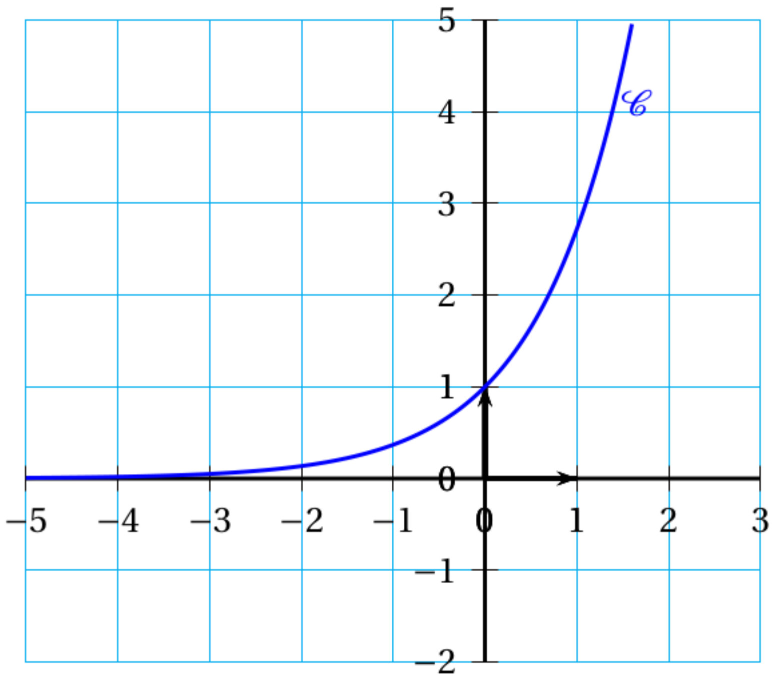
Exercice 1

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.

   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.

3. Démontrer cette conjecture.

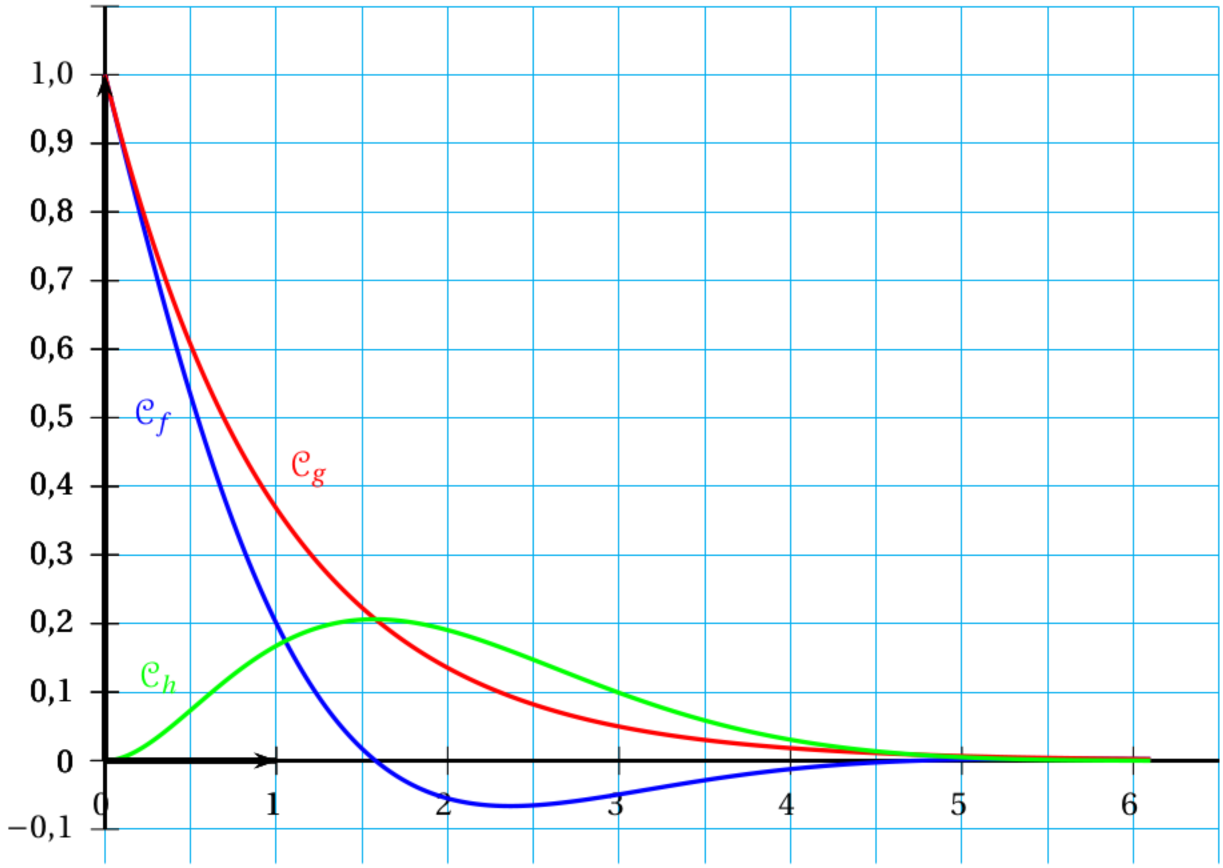
Exercice 2

On admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, ci-dessous dans un repère orthogonal.



1. Conjecturer :

a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;

b. la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;

c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.

2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$$

b. Justifier que :

- sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$
- et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ on a $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.