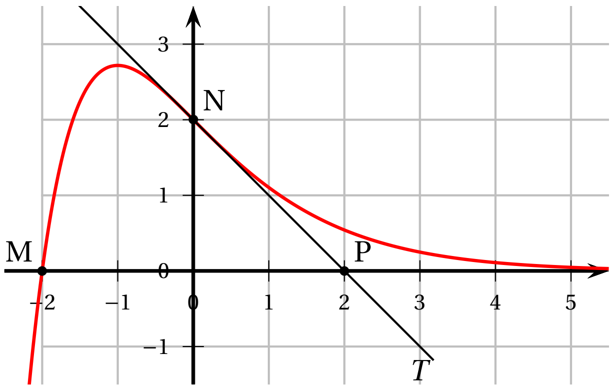
Exercice 1

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde. Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point $\mathrm{N}(0\,;2)$;
- le point $\mathrm{M}(-2\,;\,0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et $\mathrm{P}(2\,;0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

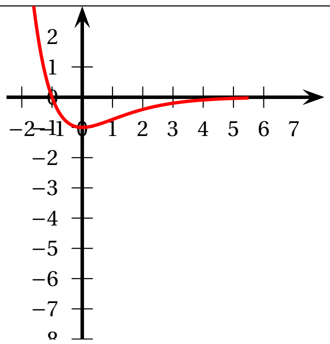
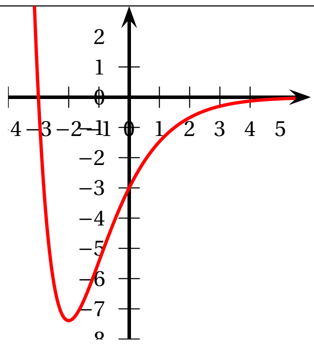
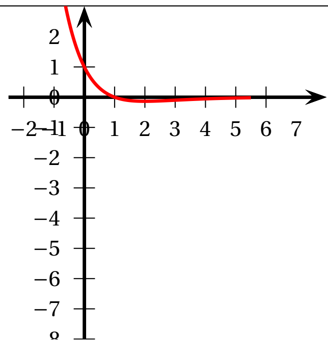
1. **a.** Donner $f(0)$.

b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a+b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.

3. **a.** Étudier la convexité de f.

b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2

Soit f une fonction convexe sur $[0;1]$ qui est deux fois dérivable sur $[0;1]$.
On considère la fonction g définie sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ par $g(x) = f(x)+f(1-x)$.
Démontrer que g est décroissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.