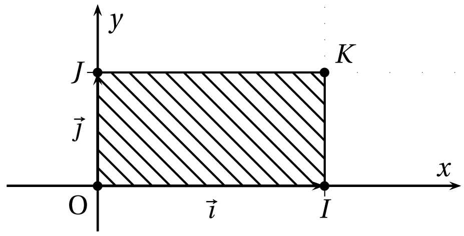
1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

Dans toute cette section :

- *on considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$;*
- *les propriétés sont énoncées pour des fonctions continues sur I.*

1.1 Unité d'aire



Définition 1

Soit $\mathscr{P}$ le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire$(OIKJ) = 1$ u.a.

Remarque 1

- $OIKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

1.2 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

Définition 2

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et soit deux réels a et b tels que $\boxed{a \leqslant b}$.
Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ dont la courbe est notée $\mathscr{C}_f$.
On appelle *aire sous la courbe de f entre $x = a$ et $x = b$* l'aire, exprimée en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ défini par :

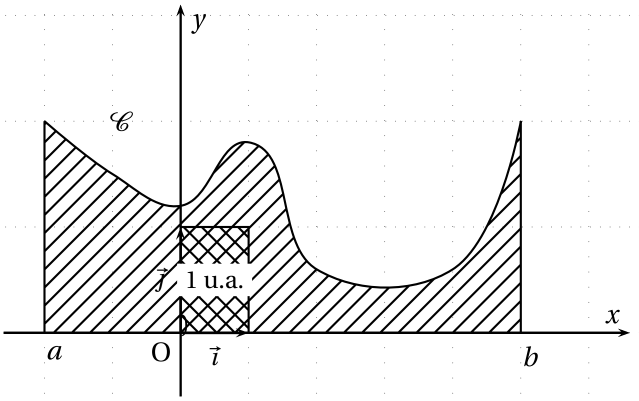
$$M\left(x\,;\,y\right) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right.$$

L'intégrale de f entre a et b est l'aire sous $\mathscr{C}_f$ entre $x = a$ et $x = b$, exprimée en u.a..
On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
a et b sont **les bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 2

- On peut noter indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \dots$

  La variable d'intégration est une variable *libre* car elle n'est liée à aucun quantificateur, on peut l'appeler x ou t ou $u \dots$.
- Si $a = b$ alors $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- On $\displaystyle\int_a^b 1\mathrm{d}x = b - a$ c'est l'aire d'un rectangle de hauteur 1 et de base $b - a$ mais c'est aussi la longueur de l'intervalle $[a\,;\,b]$.



1.3 Quelques exemples

Capacité 1 ***Calculs d'aires élémentaires***

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = 2 - x$.

1. Représenter les surfaces dont les aires, en unités d'aire, sont égales aux intégrales :

$$I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer ces intégrales et vérifier avec la calculatrice.

Capacité 2 ***En physique***

Soit $M(t)$ un point mobile sur un axe tel que à chaque instant $t \in [0\,; +\infty[$ (en secondes) on connaît sa vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde.
A l'instant $t = 0$, le point mobile est à l'origine de l'axe et pour tout $t \in [0\,; +\infty[$, on a $v(t) = 3$ m.s^{-1}.

1. Justifier que la fonction v est continue sur $[0\,; +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t$.

   A quelle grandeur physique correspond ce nombre ?

2. Calculer $\dfrac{1}{5-2}\displaystyle\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t$. A quelle grandeur physique correspond ce nombre ?

3. Soit un instant $t \in [0\,; +\infty[$.

   a. Calculer $\displaystyle\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$ qu'on note $g(t)$.

   b. Quelle grandeur physique représente $g(t)$?

   c. Justifier que la fonction g est dérivable sur $[0\,; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Remarque 3

Dans l'exemple précédent $v(t)$ est une vitesse, en m.s^{-1}, et $\displaystyle\int_0^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_0^4 v(x)\,\mathrm{d}x$ est la distance parcourue entre les instants $x = 0$ et $x = 4$, exprimée en secondes s.

Si on note $y = v(x)$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b v(x)\mathrm{d}x$, est une grandeur homogène au produit des grandeurs xy.

1.4 Encadrement de l'intégrale d'une fonction continue positive

Méthode ***voir manuel p. 330***

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a;b]$. La **méthode des rectangles** donne une approximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la somme des aires de n rectangles recouvrant l'aire sous $\mathscr{C}_f$ (pour simplifier on parle de somme des rectangles).

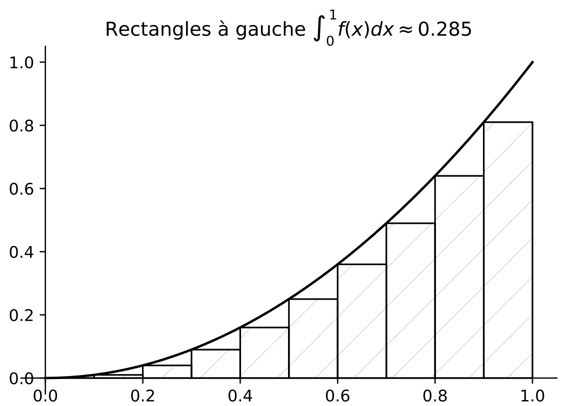
- On partage $[a;b]$ en n subdivisions de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ appelé **pas**. Pour tout entier $k \in [\![0;n-1]\!]$, la subdivision de rang k est l'intervalle $\left[a+k\times\frac{b-a}{n};a+(k+1)\times\frac{b-a}{n}\right]$.
- Sur chaque subdivision on construit un rectangle de même base le **pas** et de hauteur variable $f(x)$ où x est une valeur choisie dans la subdivision.
  - si on choisit $xg_k = a+k\times\frac{b-a}{n}$ la *borne gauche* de la subdivision, on parle de *rectangle à gauche*, d'aire $f(xg_k)\times\text{pas}$;
  - Si on choisit $xd_k = a+(k+1)\times\frac{b-a}{n}$ la *borne droite* de la subdivision, on parle de *rectangle à droite*, , d'aire $f(xd_k)\times\text{pas}$.

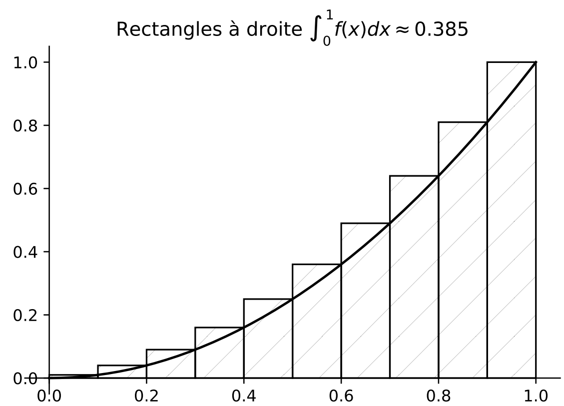
Encadrement de l'intégrale par des sommes de rectangles :

- Si f croissante sur $[a;b]$, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} f(xg_k)\times\text{pas} \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(xd_k)\times\text{pas}$
- Si f décroissante sur $[a;b]$, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} f(xg_k)\times\text{pas} \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(xd_k)\times\text{pas}$

On admet que si f continue sur $[a;b]$ alors une suite de sommes de rectangles dont les pas tendent vers 0, converge vers l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[0;1]$





Capacité 3 ***voir capacité 2 p.331***

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a; b]$.

1. Compléter les fonctions Python ci-dessous pour qu'elles renvoient une approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la somme de rectangles à gauche construits sur n subdivisions régulières de l'intervalle $[a; b]$.

```python
def  SomRecGauche(f, a, b, n):
    srec = 0
    pas = (b - a)/n
    x = a
    for k in range(n):
        rec = ...
        srec = ...
        x = x + pas
    return srec
```

```python
def SomRecGauche2(f, a, b, n):
    srec = 0
    pas = (b - a) / n
    for k in range(n):

        srec = ...

    return srec
```

2. Écrire une fonction `SomRecDroite(f, a, b, n)` qui retourne une approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$ par la somme de rectangles à droite construits sur n subdivisions régulières de l'intervalle $[a; b]$.

2 Primitives d'une fonction continue

2.1 Théorème fondamental

Théorème 1 ***théorème fondamental***

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée est f.

Démonstration ***ROC voir manuel page 184***

Dans le cadre du programme de Terminale Spécialité on ne démontre ce théorème que dans le cas où la fonction f est continue, positive et croissante sur $[a; b]$.

f est continue et positive sur $[a; b]$ donc pour tout $x \in [a; b]$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Ainsi on peut définir sur $[a; b]$ la fonction F par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in [a; b]$.
Puisque f est positive sur $[a; b]$, $F(x)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les abscisses a et x.

- $\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : h>0}}$

  $h > 0$ donc $x < x + h$ et f positive sur $[a; b]$, donc $F(x+h) - F(x)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}^+$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les abscisses x et $x + h$:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

f est croissante sur $[a\,;\,b]$ et $h > 0$ donc pour tout $t \in [x\,;\,x+h]$:

$$f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$$

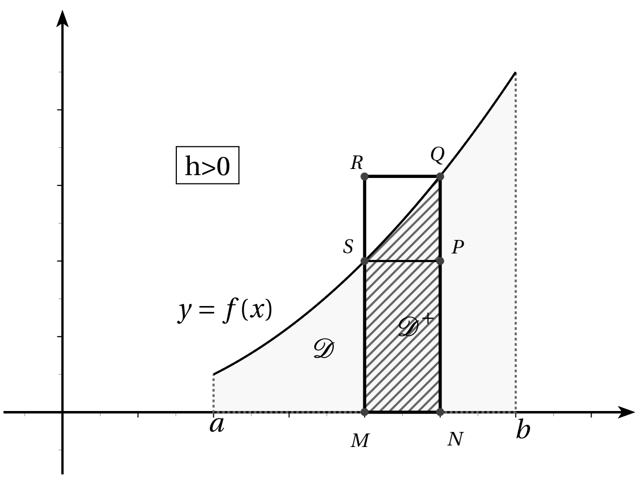
Or $F(x+h) - F(x)$, l'aire de $\mathscr{D}^+$ est comprise entre les aires des rectangles $MNPS$ et $MNQR$.

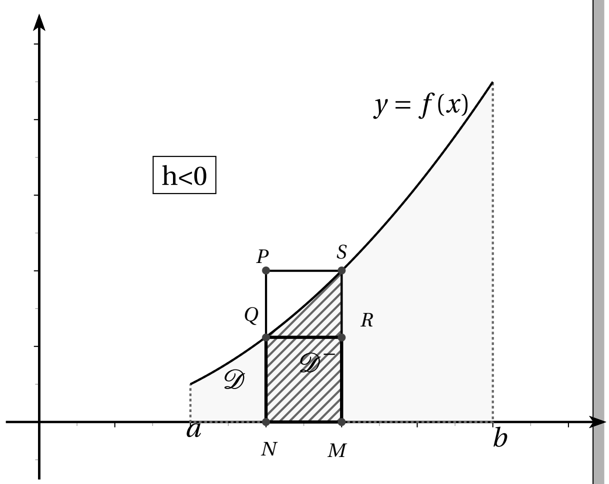
L'aire de $MNPS$ est égale à $h \times f(x)$ et l'aire de $MNQR$ est égale à $h \times f(x+h)$ donc,

$$h \times f(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h \times f(x+h)$$

En divisant tous les membres des inégalités par $h > 0$, il vient :

$$f(x) \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x+h) \qquad (1)$$





- $\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas : h<0}}$

$h < 0$ donc $x + h < x$ et f positive sur $[a\,;\,b]$, donc $F(x) - F(x+h)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}^-$ compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les abscisses $x+h$ et x :

$$F(x) - F(x+h) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x+h}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

f est croissante sur $[a\,;\,b]$ et $h < 0$ donc pour tout $t \in [x+h\,;\,x]$:

$$f(x+h) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$$

Or $F(x) - F(x+h)$, l'aire de $\mathscr{D}^-$ est comprise entre les aires des rectangles $MRQN$ et $MSPN$.

L'aire de $MRQN$ est égale à $(x - (x+h)) \times f(x+h)$ et l'aire de $MSPN$ est égale à $-h \times f(x)$ donc,

$$-h \times f(x+h) \leqslant F(x) - F(x+h) \leqslant -h \times f(x)$$

En divisant tous les membres des inégalités par $-h > 0$, il vient :

$$f(x+h) \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x) \qquad (2)$$

- Synthèse

f est continue sur $[a\,;\,b]$ donc en $x \in [a\,;\,b]$ donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

De plus $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$ (limite d'une fonction constante puisque $f(x)$ ne dépend pas de h).

D'après le théorème des « gendarmes » on déduit de ces limites et des encadrements (1) et (2) que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

Par définition, la fonction F est donc dérivable en $x \in \mathrm{I}$ et $F'(x) = f(x)$.

C'est vrai pour tout réel x appartenant à I, donc F est dérivable sur I et sa fonction dérivée sur I est f.

Sur I, on a donc $F' = f$.

Capacité 4 ***Étudier une fonction définie par une intégrale, voir capacité 3 p.333***

Soit f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Étudier les variations, les limites aux bornes et le signe de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Justifier que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le sens de variation de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

2.2 Primitives d'une fonction continue

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle *primitive de* f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.
« F a pour dérivée f » équivaut à « F est une primitive de f »

Capacité 5 ***Vérifier qu'une fonction est une primitive***

1. Soient les fonctions f et F continues sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ définies par :

$$F(x) = \tan x - x \quad \text{et} \quad f(x) = \tan^2 x$$

   Démontrer que F est une primitive de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Soient g et G les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$$

   a. Démontrer que G est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Déterminer une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en e. En existe-t-il d'autres ?

Théorème 2

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Démonstration *ROC*

On ne démontre ce théorème que dans le cas où I=$[a\,;\,b]$ et où f admet un minimum m sur I=$[a\,;\,b]$.

Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - m$.
g est continue et positive sur I donc d'après le théorème 1 (dit fondamental) , la fonction g admet une primitive G sur $[a\,;\,b]$.
Soit F la fonction définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.
F est dérivable sur $[a\,;\,b]$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in [a\,;\,b]$ on a $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur I.

Théorème 3 ***démontré dans le chapitre équations différentielles***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I.

1. G est une primitive de f sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
   Il existe une unique primitive H de f sur I telle que $H(x_0) = y_0$.

Remarque 4

Dans un chapitre précédent on a introduit la fonction logarithme népérien ln comme fonction réciproque de la fonction exponentielle (dont on a démontré l'unicité comme solution sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ mais admis l'existence).
On a montré que ln était dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ avec de plus $\ln 1 = 0$.

Or la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ donc admet des primitives sur $]0\,;\,+\infty[$ d'après le théorème 3 et il existe une unique primitive de f qui s'annule en 1 d'après le théorème précédent. Ainsi on prouve l'existence et l'unicité de la fonction ln (et donc de sa réciproque la fonction exponentielle) et de plus :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

2.3 Tableaux des primitives

2.3.1 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Le tableau 1 de la présente page donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré, il s'obtient à partir du tableau des dérivées en vérifiant que $F' = f$.

TABLE 1 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F ($C \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ (si $n \geqslant 0$) $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ (si $n < -1$)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	$F(x) = \ln(x) + C$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x < 0$)	$F(x) = \ln(-x) + C$	$]-\infty\,;0[$
$f(x) = \frac{1}{x}$ (pour $x \neq 0$)	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert) + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \ln(x)$ (logarithme népérien)	$F(x) = x\ln(x) - x + C$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ (exponentielle de base e)	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ (avec $a \neq 0$)	$F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ (avec $a \neq 0$)	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ (avec $a \neq 0$)	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$F(x) = \tan x + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2.3.2 Tableau d'opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 2 de la présente page. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

TABLE 2 – Opérations sur les primitives

Conditions	f s'écrivant sous la forme	admet comme primitive F (à une constante C près)
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' + v'$	$u + v + C$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante	$\lambda u'$	$\lambda u + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' u^2$	$\frac{1}{3} u^3 + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$
Plus généralement : Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$ Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
Primitive d'une fonction composée avec une fonction affine : soient $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$	$u'(ax + b)$	$\frac{1}{a} u(ax + b) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' \mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$u' \cos(u)$	$\sin(u) + C$
Pour tout $x \in \mathrm{I}$	$-u' \sin(u)$	$\cos(u) + C$

Remarque 5

La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais on ne peut pas donner de forme explicite de celles-ci. La primitive de f s'annulant en 0 s'écrira $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Intégrale d'une fonction continue

3.1 Intégrale d'une fonction continue positive à l'aide d'une primitive

Théorème 4

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Soit F une primitive de f. On a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

Le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

On note aussi : $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$

Démonstration

f est continue et positive sur I donc d'après le théorème fondamental, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

De plus on a : $F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$

Pour tout $b \in \mathrm{I}$ on a donc :

$$F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Or $F(a) = 0$ donc :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

La variable d'intégration t est libre, on peut la remplacer par x

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

De plus, si G est une autre primitive de f sur I alors d'après le théorème 4, il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ et donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Capacité 6

1. Étudier la position relative des courbes d'équations $y = 1$, $y = x$ et $y = x^2$ sur l'intervalle $[0;1]$.

2. Calculer puis interpréter graphiquement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \quad J = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \quad K = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \quad L = \int_0^1 1 - x^2\,\mathrm{d}x \quad M = \int_0^1 x - x^2\,\mathrm{d}x$$

3.2 Généralisation de la notion d'intégrale

Définition 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f, et a et b deux réels quelconques de I (on ne fixe plus la contrainte $a \leqslant b$).

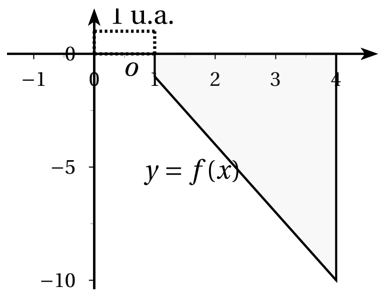
On appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$.

On note : $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$.

Remarque 6

- Si $a \leqslant b$ et f est continue positive sur $[a\,;b]$, cette définition est cohérente avec la définition 1 d'après le théorème 4.
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente(en unités d'aire) l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (sous $\mathscr{C}_f$).
- Si $a \leqslant b$ et f une fonction négative et continue sur $[a\,;b]$,
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -(-F(b) - (-F(a)) = -\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire du domaine $\mathscr{D}'$ compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (au-dessus de $\mathscr{C}_f$).

  Par exemple, ci-contre on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $[1\,;4]$ par $f(x) = 2 - 3x$ qui est négative sur $[1\,;4]$. L'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est égale à ...



- Si $a \leqslant b$ et f de signe quelconque sur $[a\,;b]$, on découpe l'intervalle en intervalles sur lesquels f garde un signe constant.
  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la somme des intégrales calculées sur chaque intervalle inclus dans $[a\,;b]$, où f est de signe constant. C'est la somme algébrique des aires des domaines ainsi définis.

Capacité 7 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, voir capacité 4 p. 333***

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$;

2. $\int_{2}^{4} \dfrac{1}{(2x-1)^4}\,\mathrm{d}x$;

3. $\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta$;

4. $\int_{0}^{\pi} \cos(2\theta)\ d\theta$;

5. $\int_{-4}^{-2} (3x-1)^6\mathrm{d}x$;

6. $\int_{0}^{x} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

7. $\int_{e}^{e^3} \dfrac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

8. $\int_{0}^{x} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

9. $\int_{2}^{e} \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$

3.3 Propriétés de l'intégrale

Dans toute cette section, on considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

3.3.1 Relation de Chasles

Propriété 1 ***Relation de* CHASLES*, admise***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Remarque 7

Soit f continue sur un intervalle contenant deux réels a et b.

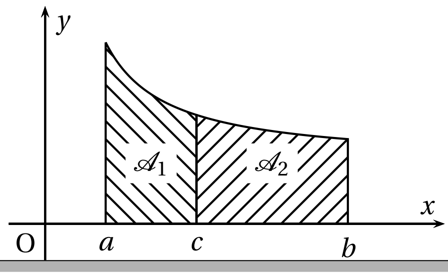
D'après la relation de Chasles on doit avoir : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

On en déduit donc un corollaire utile de la relation de Chasles : $\boxed{\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$

Remarque 8

Dans le cas où $a \leq c \leq b$ et où $f \geq 0$, la relation de CHASLES se traduit par l'additivité des aires : sur la figure ci-contre,

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$



3.3.2 Linéarité de l'intégrale

Propriété 2 ***Linéarité, admise***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b \left(\alpha f(x)\right)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- Plus généralement : $\displaystyle\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- En particulier : $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Capacité 8 ***Application des propriétés de l'intégrale***

Soient f et g deux fonctions continues sur $[1\,;5]$, on donne :

$$I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-3 \qquad J=\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x=2 \qquad K=\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x=12$$

Calculer $L=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$, $M=\int_1^5 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$ puis $N=\int_1^5 (2f(x)-3g(x))\mathrm{d}x$

Capacité 9 ***Intégration et parité***

Soit I un intervalle centré en 0 et f une fonction définie et continue sur I.

1. φ est la fonction définie sur I par $\varphi(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
   - **a.** Soit F une primitive de f sur I, justifier que pour tout réel x de I, on a $\varphi(x)=F(x)-F(-x)$.
   - **b.** Justifier que φ est dérivable sur I et que pour tout réel x de I, on a $\varphi'(x)=f(x)+f(-x)$.
   - **c.** Dans cette question on suppose que f est impaire.
     Démontrer pour tout réel x de I, on a $\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0$.
   - **d.** Application : Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t)\mathrm{d}t$.
2. ψ est la fonction définie sur I par $\psi(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   - **a.** Soit F une primitive de f sur I, justifier que pour tout réel x de I, on a $\psi(x)=F(x)-F(-x)-2(F(x)-F(0))$.
   - **b.** Justifier que ψ est dérivable sur I et que pour tout réel x de I, on a $\psi'(x)=f(x)+f(-x)-2f(x)$.
   - **c.** Dans cette question on suppose que f est paire.
     Démontrer pour tout réel x de I, on a $\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   - **d.** Application : Comparer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\pi}\cos(t)\mathrm{d}t$.

3.3.3 Intégrale et inégalités

Propriété 3 ***Intégrale et inégalités***

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a\leq b$ deux réels de I.

1. Si $f\geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.
2. Si $f\leq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq 0$.
3. Si $f\leq g$ sur I alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration

f, g, $f-g$ sont continues sur I donc toutes les intégrales considérées sont légitimes.

1. On suppose $f \geqslant 0$ sur I.

   Si $a \leqslant b$, par définition $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ donc elle est positive.

2. Si $f \leqslant 0$ sur I alors $-f \geqslant 0$ sur I et donc d'après le premier point on a $\displaystyle\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

   Par linéarité on en déduit que $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ et donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq 0$.

3. On suppose $f \leqslant g$ sur I.

   On a donc $0 \leqslant g - f$ sur I donc d'après la propriété précédente on a $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

   Par linéarité de l'intégrale, il vient $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Capacité 10 ***Majorer ou minorer une intégrale, voir capacité 5 p.335***

1. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

   a. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{1}^{0} x^2 \,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln x \,\mathrm{d}x$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right) \,\mathrm{d}x$.

   a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \in [0\,;\,1]$, on a : $\ln(1 + x^{n+1}) \leqslant \ln(1 + x^n)$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$ on a : $0 \leqslant \ln\left(1 + x^n\right) \leqslant x^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Capacité 11 ***Étudier une suite d'intégrales, voir capacité 7 p.337***

Soit f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que pour tout $t \in [2\,;\,+\infty[$ on a : $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t}$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $0 \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2\pi}}$

3. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

4. Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ converge.

4 Intégration par parties

4.1 Formule d'intégration par parties

Propriété 4

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I.
Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration

- Hypothèses : u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, u' et v' continues sur I.
- Raisonnement :
  Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc leur produit uv est dérivable sur I et on a :
  $$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
  Si u, v, u', v' sont continues sur I alors uv, $u'v$, uv' et $(uv)' = u'v + uv'$ le sont aussi et l'intégrale suivante est définie :
  $$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$
  par linéarité de l'intégrale, on a
  $$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$
  la fonction uv est une primitive de $(uv)'$ donc $\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b$
  $$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$
- Conclusion : On en déduit que :
  $$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

4.2 Méthode d'intégration par parties

Capacité 12 ***Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, voir capacité 6 p.335***

1. Soit l'intégrale $K = \int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Compléter :
     Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$, on pose :
     $$u(x) = x \qquad u'(x) = \dots$$
     $$v'(x) = \sin(x) \qquad v(x) = \dots$$
   - **b.** Calculer l'intégrale K en appliquant la méthode d'intégration par parties.
2. Calculer l'intégrale $\int_1^{\mathrm{e}} (3x-2)\ln(x)\,\mathrm{d}x$ avec la méthode d'intégration par parties.
3.
   - **a.** Soit x un réel strictement positif, avec la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
   - **b.** En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

5 Applications du calcul intégral

5.1 Calcul de l'aire entre deux courbes

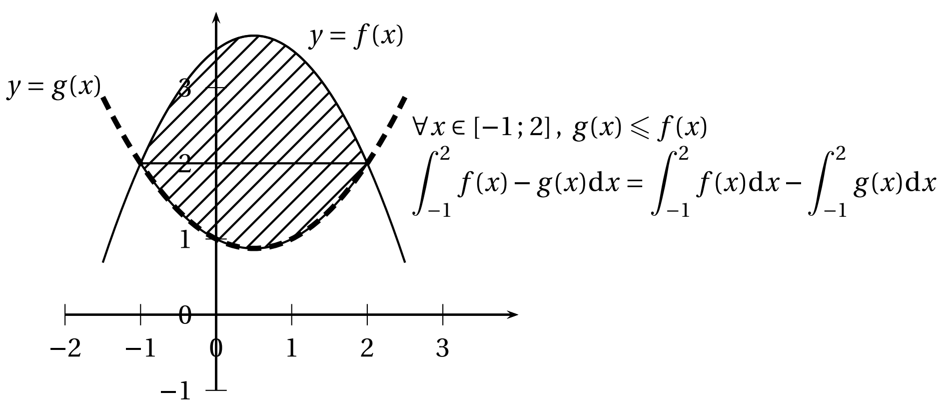
Propriété 5

Soient f et g deux fonction continues positives sur $[a\,;b]$ telles que pour tout $x \in [a\,;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

représente l'aire (en un u.a.) du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f ou g n'est pas positive sur $[a\,;b]$ mais que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$ représente aussi l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

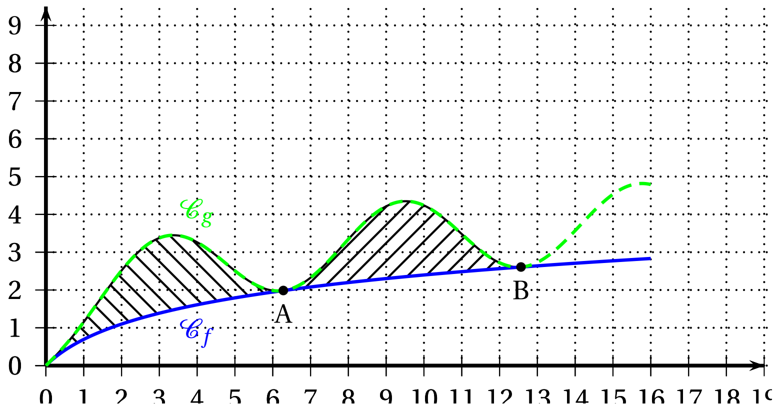


Capacité 13 ***Calculer l'aire entre deux courbes, capacité 8 p.337***

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;16]$ par

$$f(x)=\ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.



5.2 Valeur moyenne

Définition 5

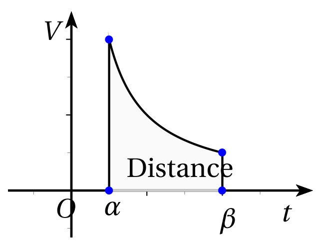
Soit $a<b$, la valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ est le nombre :

$$\boxed{\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Capacité 14 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

Pour $t>0$ la vitesse d'un mobile est $v(t)=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}$ (en m.s^{-1}).

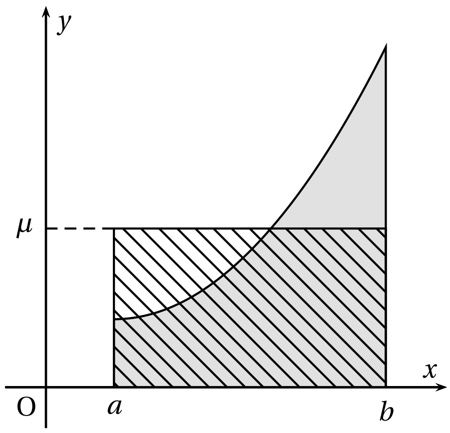
1. Calculer la distance parcourue entre les instants $t=1$ et $t=\mathrm{e}^2$ (en s).
2. Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants $t=1$ et $t=\mathrm{e}^2$.



Plus généralement, si on note $y=v(x)$ alors $\int_a^b v(x)dx$ est homogène au produit des grandeurs xy (ici m.s^{-1}.s = m). Puisque $b-a$ est homogène à x (en secondes s), la valeur moyenne de v sur $[a;b]$ est homogène à $\frac{xy}{x}=y$ (soit en m.s^{-1}), donc elle est dans la même unité que la fonction intégrée v.

Remarque 9

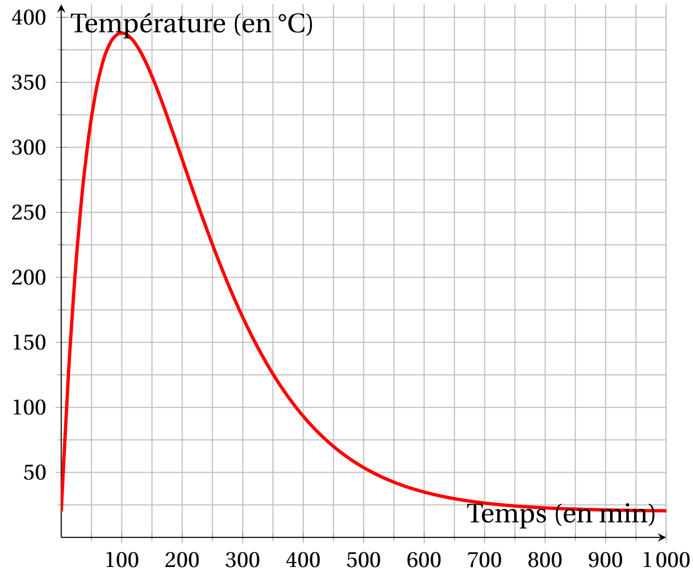
Dans le cas où f est continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec $a \neq b$) , on peut interpréter la valeur moyenne en terme d'aire.
On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu \mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.
Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.
On a donc $(b-a)\mu = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hachurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur $[a\,;b]$.



'

Capacité 15 ***Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction, voir capacité 9 p.337***

Centres-Étrangers Suède juin 2024 Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.
À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



1. Par lecture graphique, estimer la valeur de $\mu = \frac{1}{600}\int_0^{600} f(t)\text{ṭ}$. Interpréter le résultat.
2. On admet que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 10te^{-0,01t} + 20$.

   À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$ et retrouver la valeur exacte de μ.

Table des matières

Liste des tableaux