

1 Définitions, dérivabilité, étude des variations

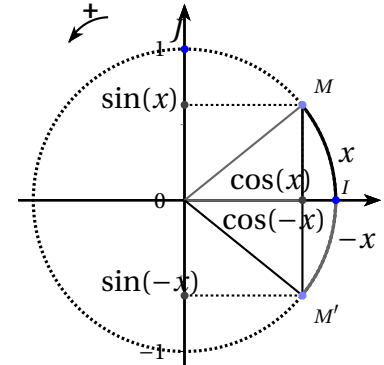
1.1 Définitions et propriétés élémentaires



Définition 1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct du plan et M l'image du réel x sur le cercle trigonométrique de centre O .

- Le **cosinus** de x , noté $\cos x$ est l'abscisse de M .
La fonction **cosinus** est définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$
- Le **sinus** de x , noté $\sin x$ est l'ordonnée de M .
La fonction **sinus** est définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$



Propriété 1

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 & \quad -1 \leq \sin x \leq 1 & \quad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) & \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) & \quad \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) \end{aligned}$$



Propriété 2 Valeurs remarquables

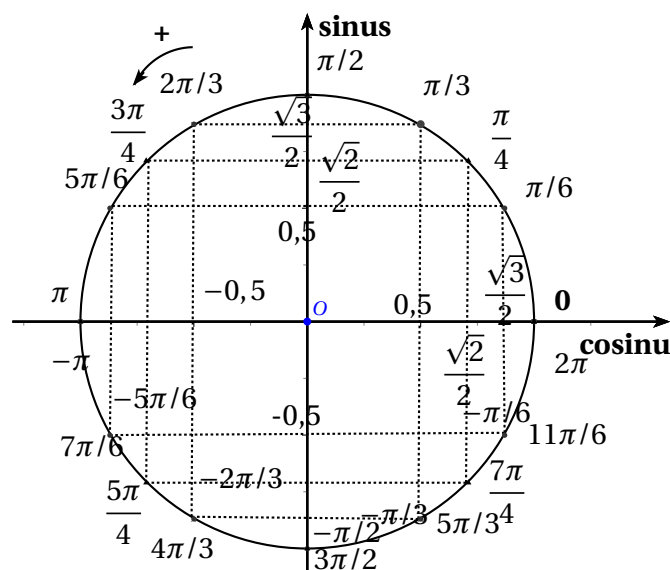
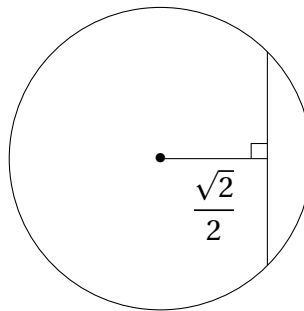


Tableau des valeurs remarquables de *cosinus* et de *sinus*.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Capacité 1

Une droite est tracée à une distance de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm du centre d'un disque de rayon 1 cm et divise ce disque en deux parties. Déterminer l'aire de la partie la plus petite.



1.2 Dérivabilité



Propriété 3 admise

1. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables (et donc continues) sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

2. Plus généralement si la fonction u est dérivable sur un intervalle I alors les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ le sont aussi et on a :

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad \text{et} \quad (\sin u)' = u' \cos u$$

3. Soient a et b deux réels.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = -a \sin(ax + b)$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = a \cos(ax + b)$$

Capacité 2

- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction cosinus au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
- f est dérivable sur I . Pour $x \in I$, exprimer $f'(x)$:
 - $f(x) = \frac{\sin x}{2} + \sin(2x) - 3 \cos(x) + \cos(3x)$ sur $I = \mathbb{R}$
 - $f(x) = e^{-x} \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$
 - $f(x) = \cos(5x + 3) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$
 - $f(x) = (\cos x)^3$ sur $I = \mathbb{R}$
- Déterminer si l'affirmation suivante est *vraie* ou *fausse* :

☞ L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

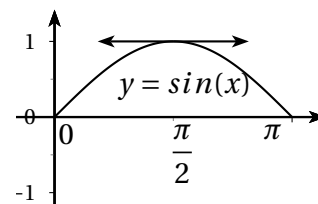
1.3 Variations des fonctions sinus et cosinus sur $[0; \pi]$

Propriété 4

Par lecture d'un cercle trigonométrique on peut déterminer le sens de variation des fonctions cosinus et sinus sur $[0; \pi]$.

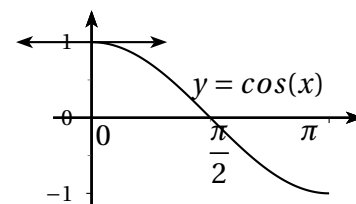
- La fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos x$	+	0	-
sin	0	1	0



- La fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin x$	-	-	-
cos	1	0	-1



2 Périodicité, parité, courbes représentatives

2.1 Parité



Définition 2

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- f est **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $\begin{cases} -x \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.
 $\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O; \vec{j})$.
- f est **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $\begin{cases} -x \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.
 $\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport au centre du repère.

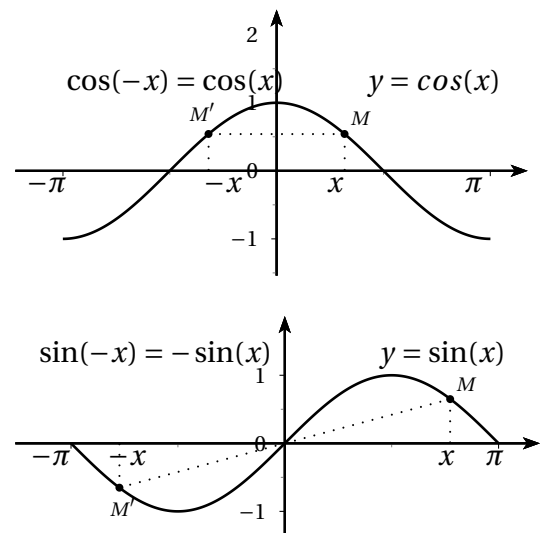


Propriété 5

- Pour tout réel x on a :

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

- La fonction cosinus est **paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.
- La fonction sinus est **impaire**, sa courbe est symétrique par rapport au centre du repère.



2.2 Périodicité



Définition 3

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

- f est **périodique** de période T (réel non nul) si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x + T$ appartient à $\mathcal{D}_f$ et $f(x + T) = f(x)$.
- $\mathcal{C}_f$ est alors invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$ ou $-T\vec{i}$.

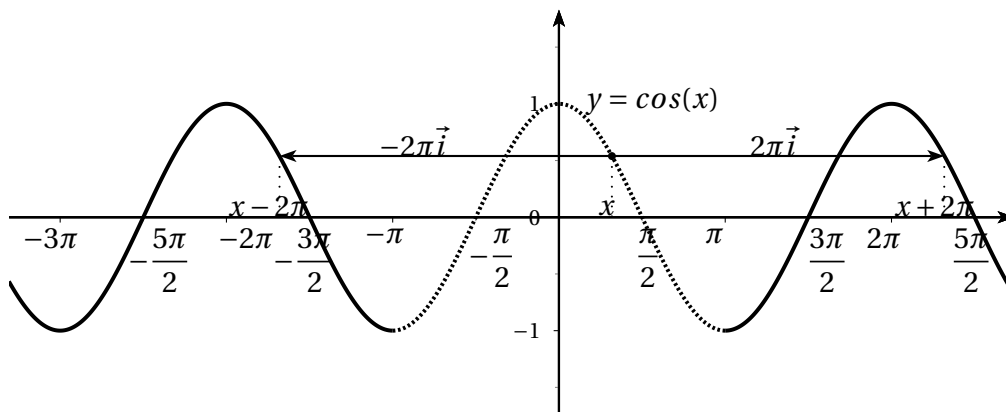


Propriété 6

- Pour tout réel x on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

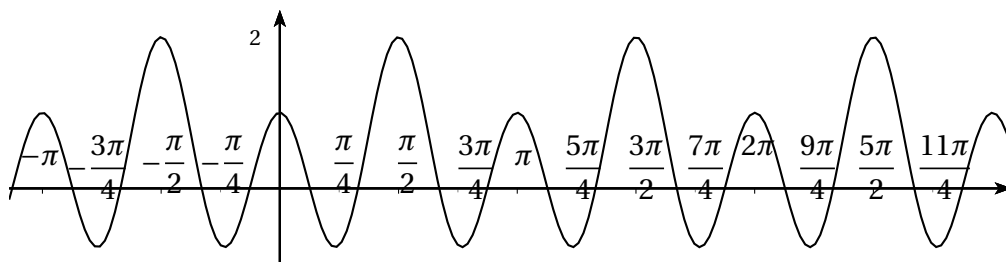
- Les fonction cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π .
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$ ou $-2\pi \vec{i}$.



Capacité 3

On a représenté ci-dessous la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin^4 x + \cos(4x)$.

- Conjecturer la parité de g et une période de g .
- Démontrer ces conjectures par le calcul.



2.3 Propriétés de symétrie des fonctions cosinus et sinus

Pour tout réel x on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

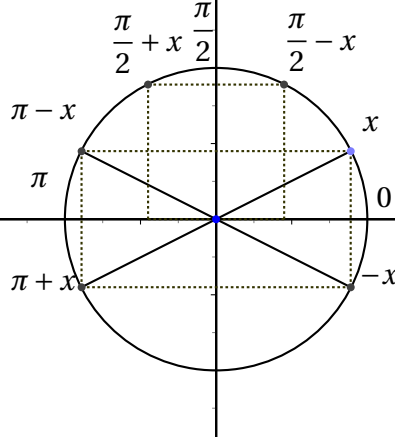
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$



$$\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

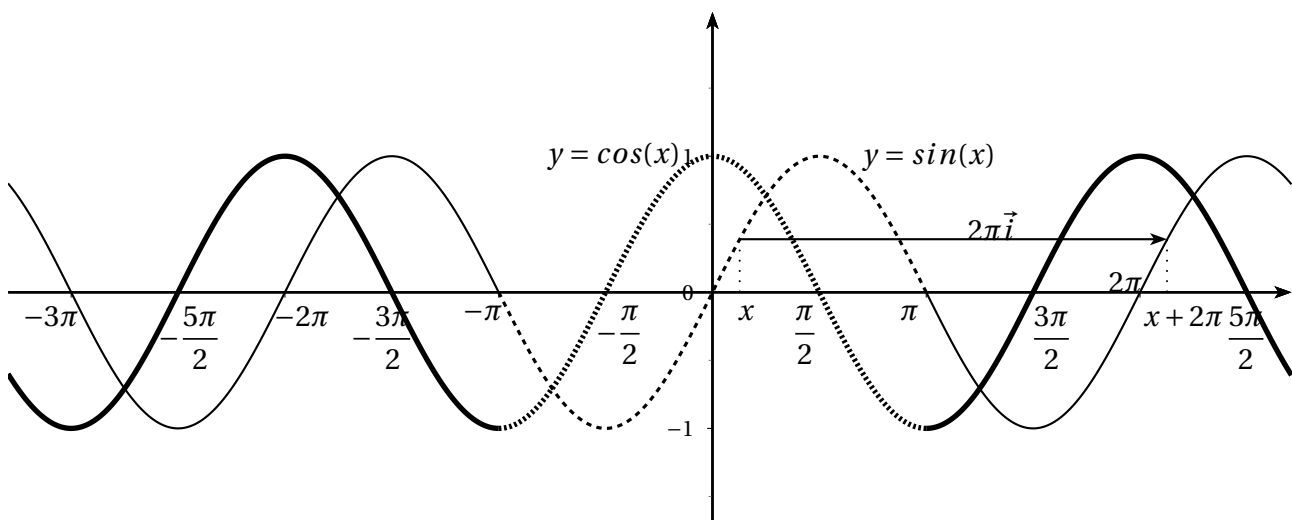
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

2.4 Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Méthode

Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont appelées des sinusoides.

- Pour représenter la courbe de la fonction sinus dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan il suffit de la tracer sur $[0; \pi]$ puis on la complète sur $[-\pi; 0]$ par symétrie de centre O (imparité) puis on la trace sur $[-\pi + k2\pi; \pi + k2\pi]$ (avec k entier relatif) par translation de vecteur $k2\pi \vec{i}$ (périodicité).
- Pour représenter la courbe de la fonction cosinus dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan il suffit de la tracer sur $[0; \pi]$ puis on la complète sur $[-\pi; 0]$ par symétrie d'axe $(O; \vec{j})$ (parité) puis on la trace sur $[-\pi + k2\pi; \pi + k2\pi]$ (avec k entier relatif) par translation de vecteur $k2\pi \vec{i}$ (périodicité).



3 Applications

3.1 Etude de limites à l'aide de fonctions trigonométriques



Propriété 7

1. Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Démonstration

1. On admettra que les seules fonctions périodiques qui admettent une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ sont les fonctions constantes.
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques et non constantes donc elles n'ont pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.
2. La fonction sinus est dérivable en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.



Capacité 4

Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} 4 + \frac{3 \sin x}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3 \cos x}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 + \frac{3 \sin x}{x}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sin x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \cos x)e^{1-x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \tan(x)$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$$

3.2 Lignes trigonométriques du type $\cos x > k$ ou $\sin x < k$

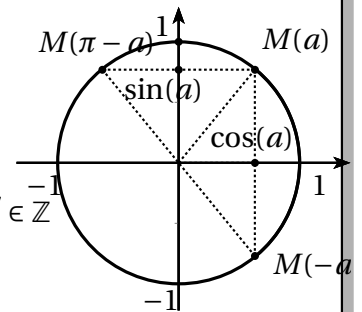
On va résoudre graphiquement $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$ puis dans $]-\pi; \pi]$ en utilisant les solutions de $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.2.1 Rappels



Propriété 8

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + k'2\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Capacité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = -0,5$;

3. $\sin x = \sin(2x)$;

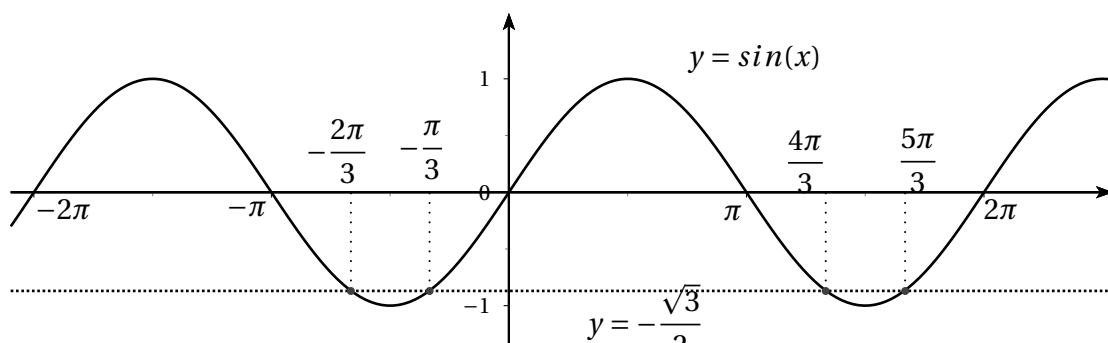
2. $\sin x = 0,5$;

4. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

3.2.2 Résolution graphique de $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'aide de la courbe représentative

Les abscisses des points de la courbe de la fonction sinus dont l'ordonnée est strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont solutions de l'inéquation $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans $]-\pi; \pi]$ on a $\mathcal{S} = \left]-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right[$ et dans $[0; 2\pi[$ on a $\mathcal{S} = \left]\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right[$.

Pour les inéquations du type $\cos x < k$ on procède de la même façon.



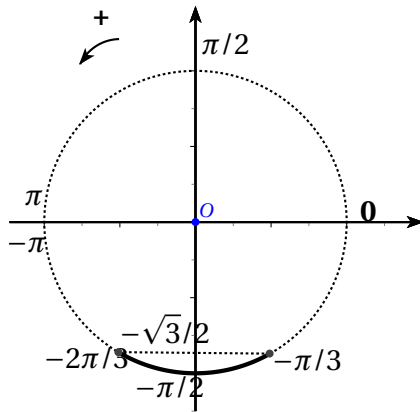
Capacité 6

Résoudre de même dans $]-\pi; \pi]$ et dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation $2 \cos x + 1 > 0$.

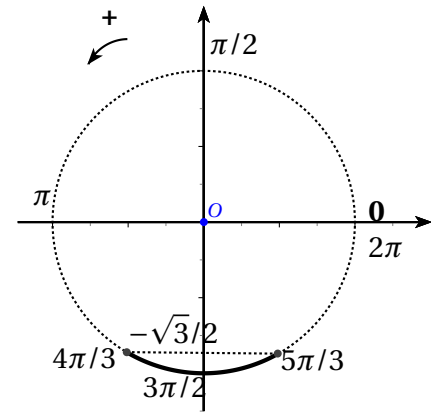
3.2.3 Résolution graphique de $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique on colorie les points dont le sinus est strictement inférieur à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c'est-à-dire dont l'ordonnée est strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Puis on repère les réels associés à ces points dans l'intervalle de résolution considéré.

Pour les inéquations du type $\cos x < k$ on procède de la même façon sauf qu'on colorie les points dont l'abscisse (le cosinus) est strictement inférieure à k .



On retrouve que dans $]-\pi; \pi]$ l'ensemble des solutions de $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left] -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right]$



On retrouve que dans $[0; 2\pi[$ l'ensemble des solutions de $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left] \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right[$

Quel est l'ensemble des solutions de cette inéquation dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$?

Capacité 7

Retrouver de même dans $]-\pi; \pi]$, dans $[0; 2\pi[$ puis dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ les solutions de l'inéquation :

$$2 \cos x + 1 > 0$$

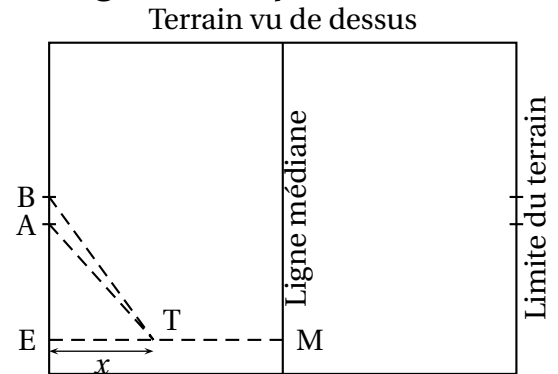
3.3 Fonction tangente

L'exercice ci-dessous a été posé au bac S lors de la session de juin 2016.

Capacité 8 Résoudre un problème avec des fonctions trigonométriques

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5,6$ m. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}.$$

$$\text{Montrer que } \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}.$$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Table des matières

1 Définitions, dérivabilité, étude des variations	1
1.1 Définitions et propriétés élémentaires	1
1.2 Dérivabilité	2
1.3 Variations des fonctions sinus et cosinus sur $[0; \pi]$	3
2 Périodicité, parité, courbes représentatives	4
2.1 Parité	4
2.2 Périodicité	4
2.3 Propriétés de symétrie des fonctions cosinus et sinus	6
2.4 Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus	6
3 Applications	7
3.1 Etude de limites à l'aide de fonctions trigonométriques	7
3.2 Lignes trigonométriques du type $\cos x > k$ ou $\sin x < k$	8
3.2.1 Rappels	8
3.2.2 Résolution graphique de $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'aide de la courbe représentative	8
3.2.3 Résolution graphique de $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'aide du cercle trigonométrique	9
3.3 Fonction tangente	10