Nom : .... Prénom : ....

Rendre l'énoncé avec la copie. Attention le sujet est composé de deux exercices répartis sur trois pages.

Exercice 1 *Continuité*

Jean, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de gin. La concentration C d'alcool dans son sang, en gramme par litre, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heures, par la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$$

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f'(t) = (2-2t)\mathrm{e}^{-t}$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ?

Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

4. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Jean veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

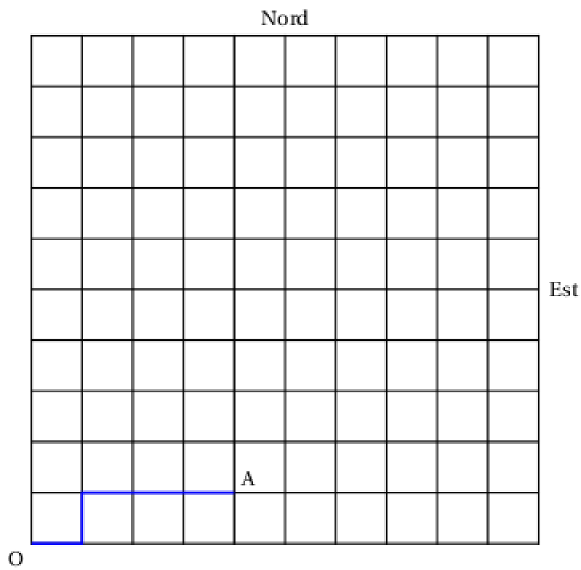
a. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel t_1 dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $f(t_1) = 0,2$.

b. Compléter la fonction Python `dichotomie(a)` ci-dessous pour qu'elle renvoie un encadrement de t_1 d'amplitude inférieure ou égale à `a` par dichotomie.

```
from math import exp

def f(t):
    return 2 * t * exp(-t)

def dichotomie(a):
    gauche = 0
    droite = 1

    while droite - gauche ...... a:

        milieu = (gauche + droite) / 2

        if f(milieu) .......... 0.2:

            ....... = milieu

        else:

            ....... = milieu

    return [gauche, droite]
```

Exercice 2 *Dénombrement*

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées $(0;0)$, le point A a pour coordonnées $(4;1)$.
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p\ ;\ q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Par exemple :
Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.
2. **a.** Placer sur la grille les points B de coordonnées $(4;0)$ et C de coordonnées $(3;1)$.

   b. On note respectivement $n(A)$, $n(B)$ et $n(C)$ les nombres de chemins pour aller respectivement vers A, B et C.
   Exprimer $n(A)$ en fonction de $n(B)$ et $n(C)$.

   c. Compléter chaque case en ligne p et colonne q du tableau ci-dessous avec le nombre de chemins pour aller de l'origine O au point de coordonnées (p,q) de la grille.
   Expliquer comment on complète une case à partir des valeurs des cases adjacentes.

$p \setminus q$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	...	...	...	...	...
2	1	...	...	...	...	...
3	1	...	...	...	...	...
4	1	...	...	...	...	...
5	1	...	...	...	...	...

3. Soit M un point de coordonnées $(p\,;q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.

- **a.** Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.
- **b.** Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.
- **c.** Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées $(7\,;5)$.
- **d.** Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.