Convexité

Corrigé des exemples du cours

Capacité 1 *Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction*

1. Par lecture graphique de leur courbe (représentée si besoin avec la calculatrice), conjecturer la convexité des fonctions suivantes :

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.

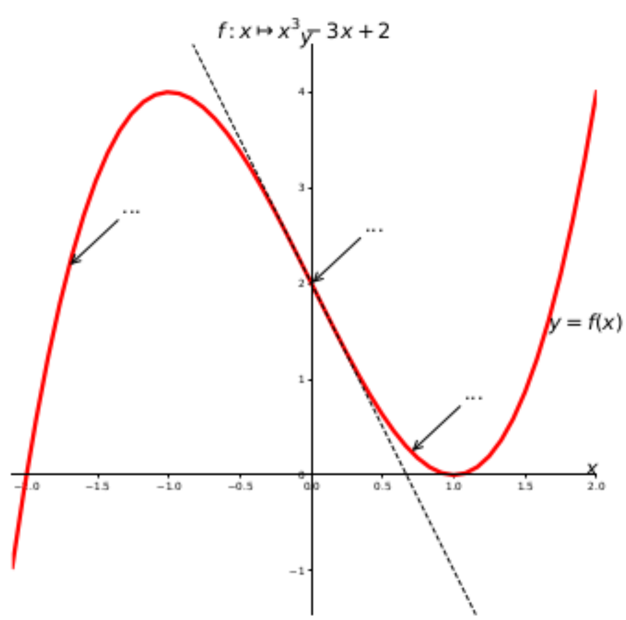
c. h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

d. m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = \mathrm{e}^x$.

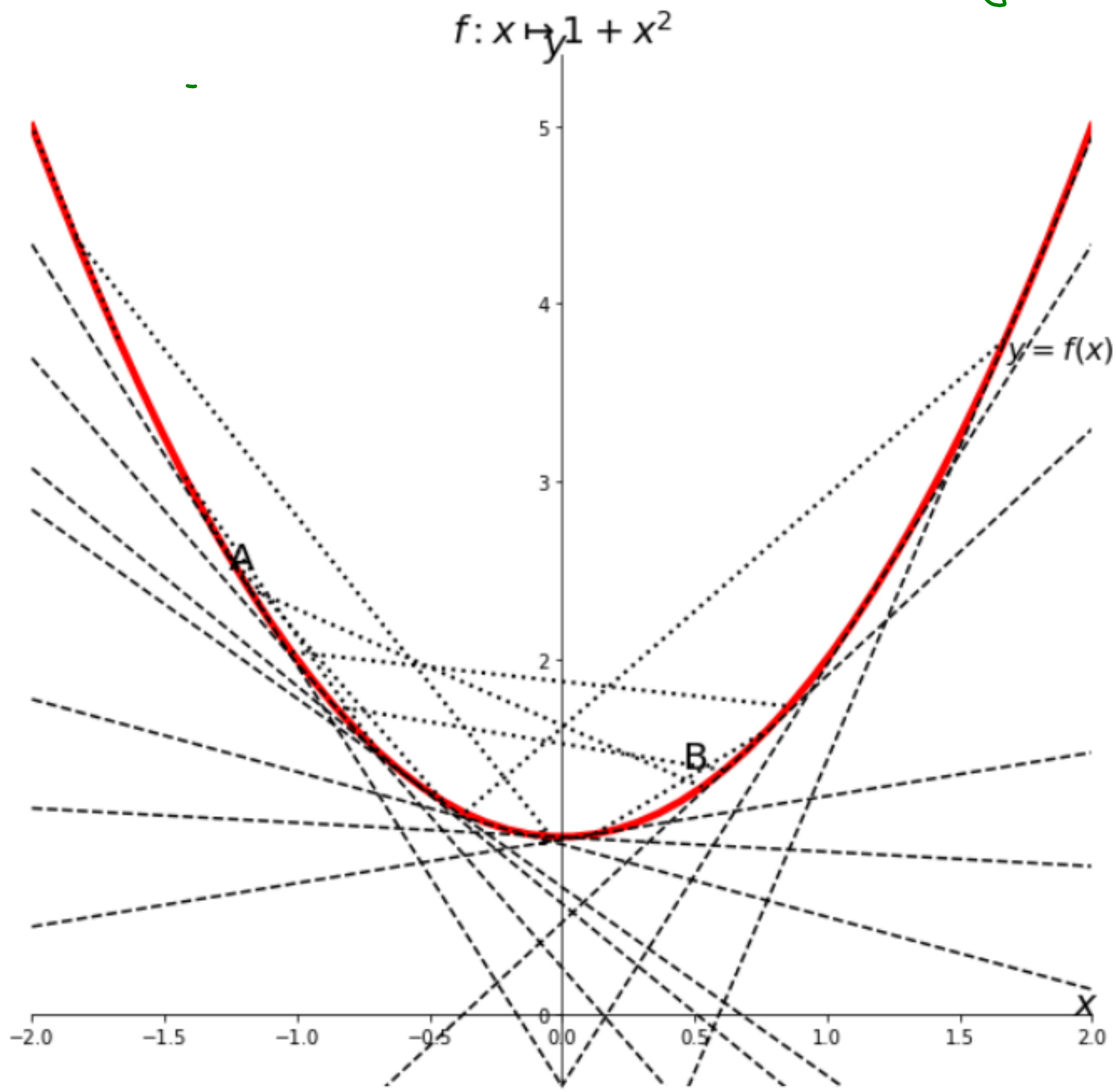
e. c définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = x^3$.

2. Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, que peut-on dire de la fonction $-f$?

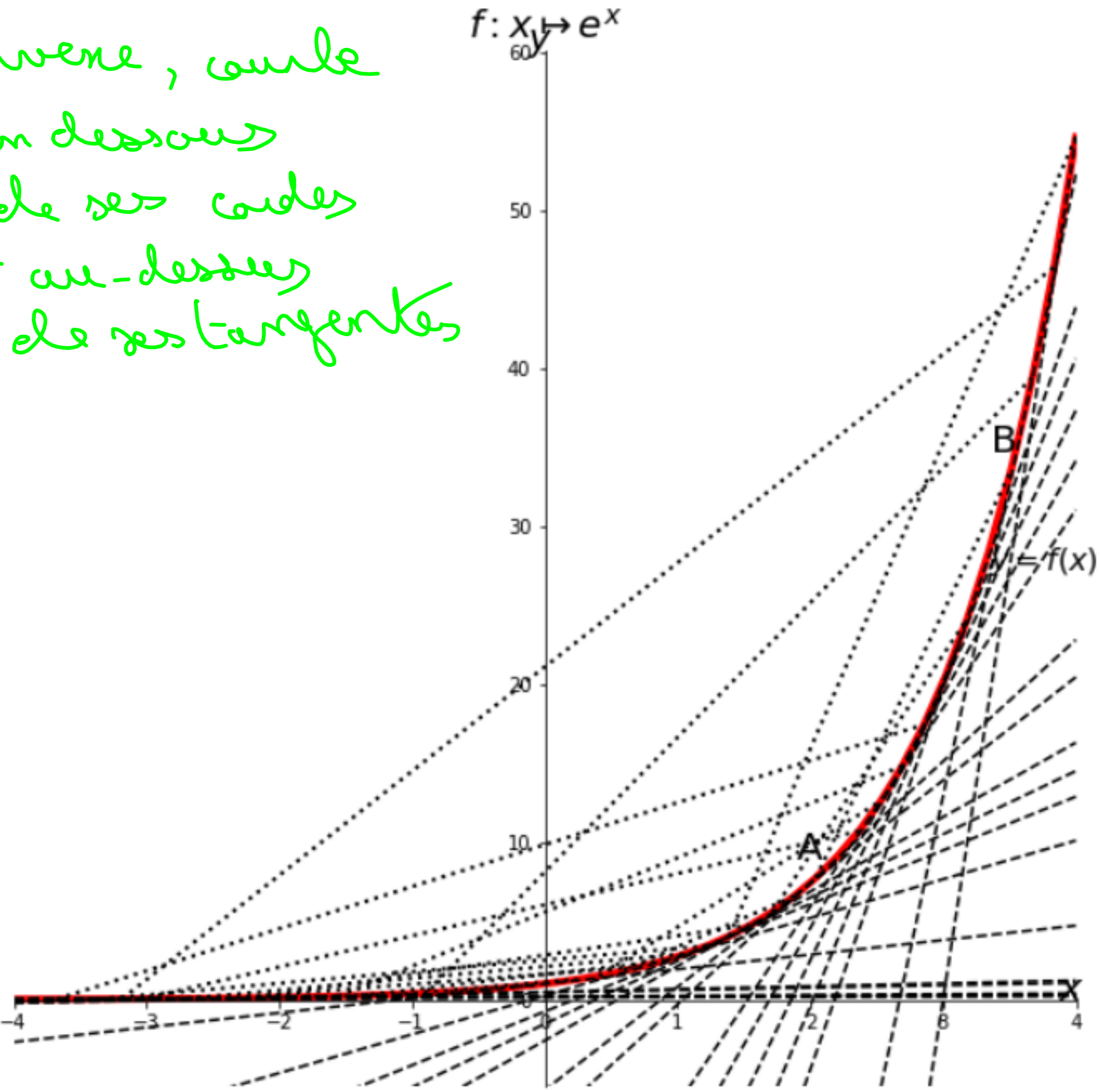
3. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et sa tangente au point d'abscisse 0. Compléter le graphique ci-dessous en indiquant convexité et point d'inflexion.



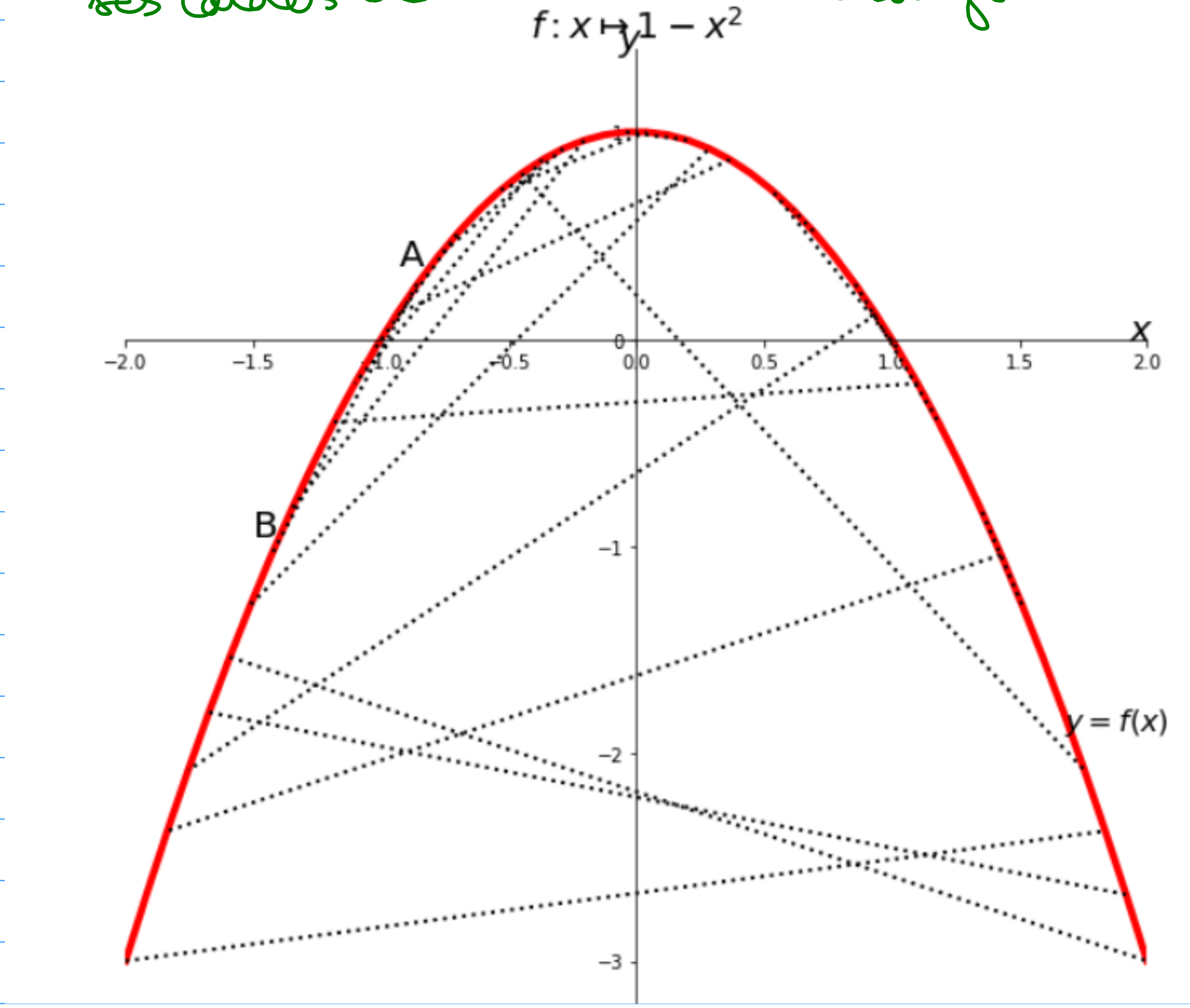
Fonction convexe, courbe en dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes

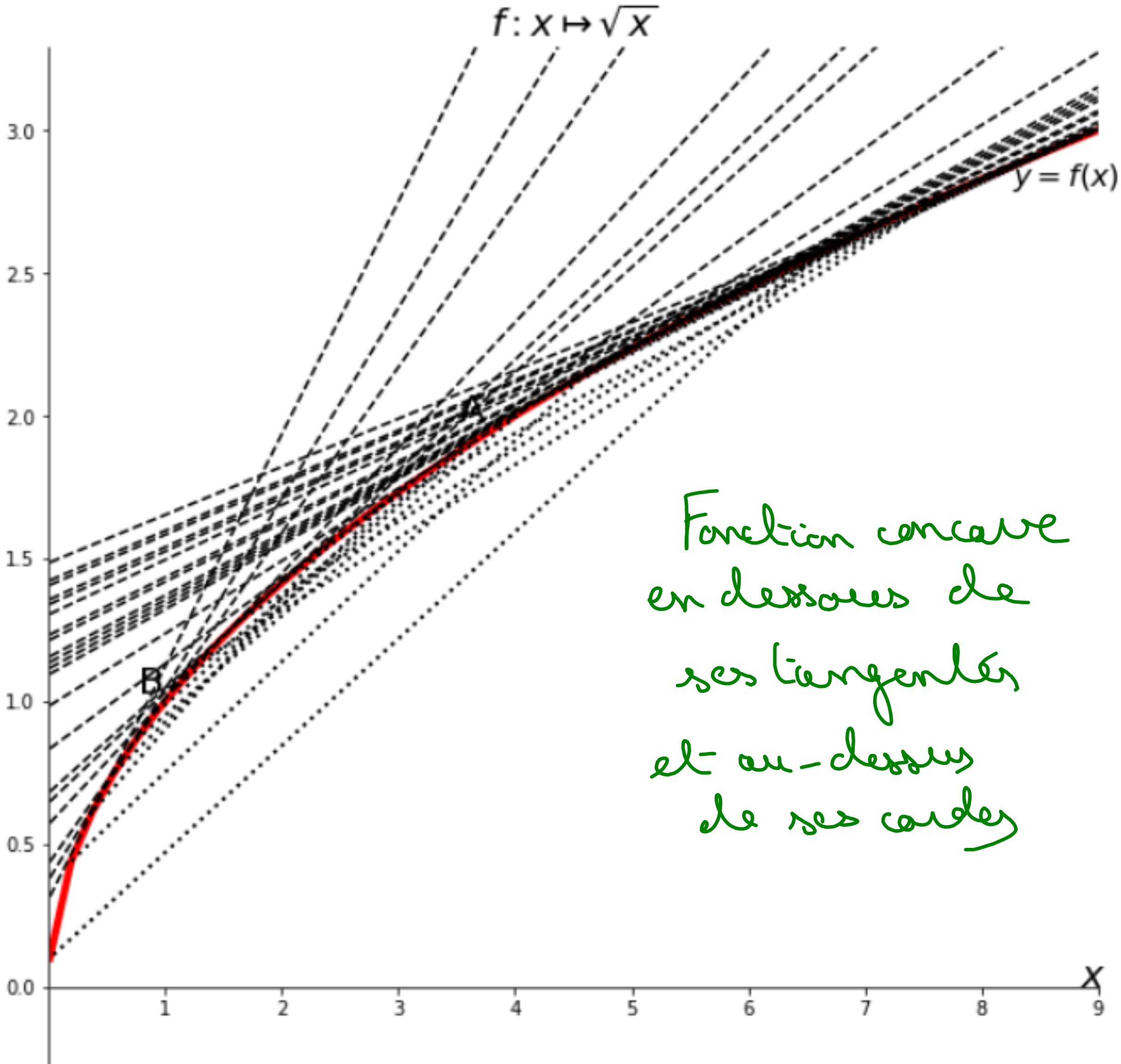


fonction convexe, courbe
en dessous
de ses cordes
et au-dessus
de ses tangentes

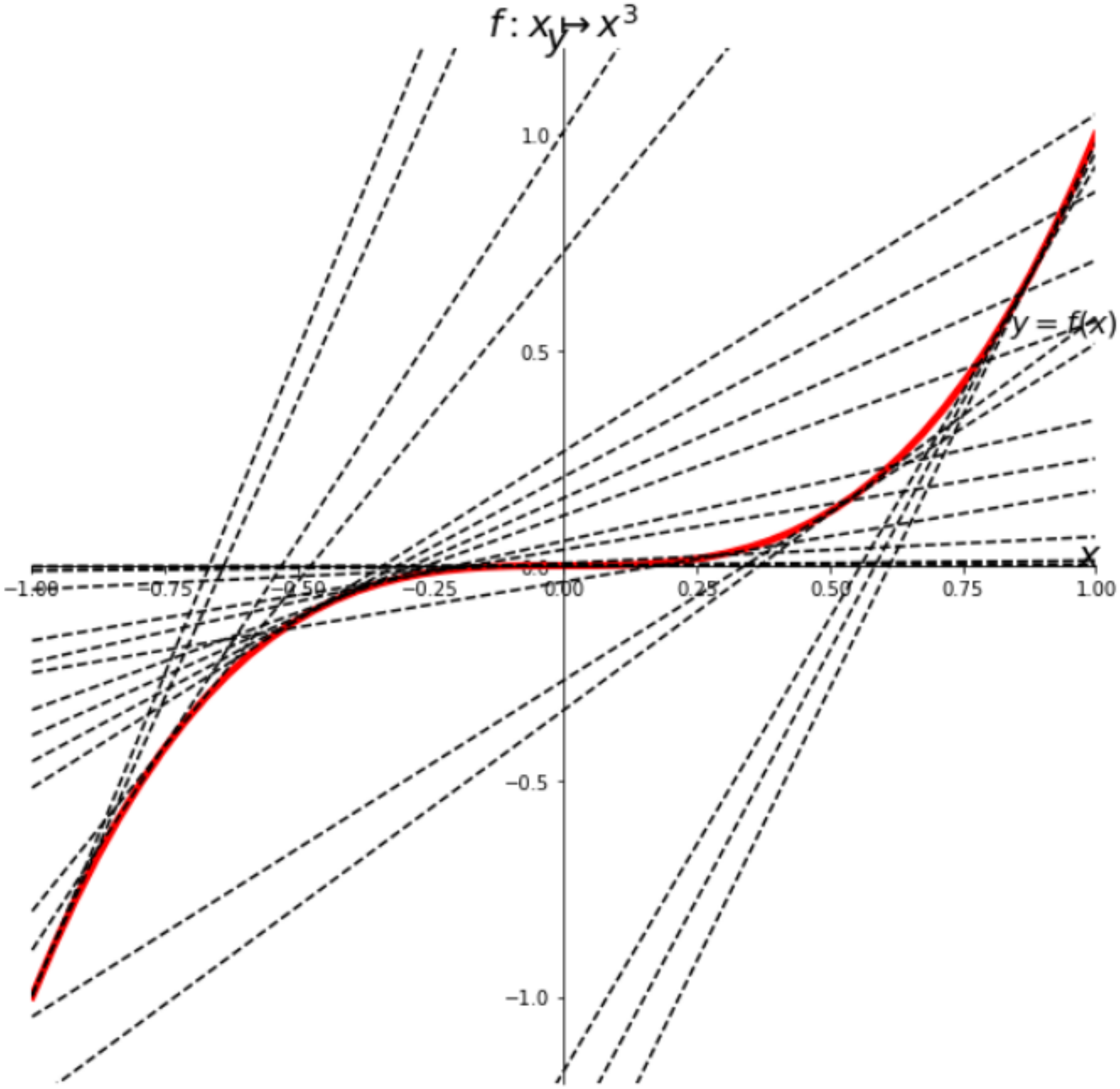


Fonction concave, courbe au-dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.





Fonction concave en dessous de ses tangentes et au-dessus de ses cordes

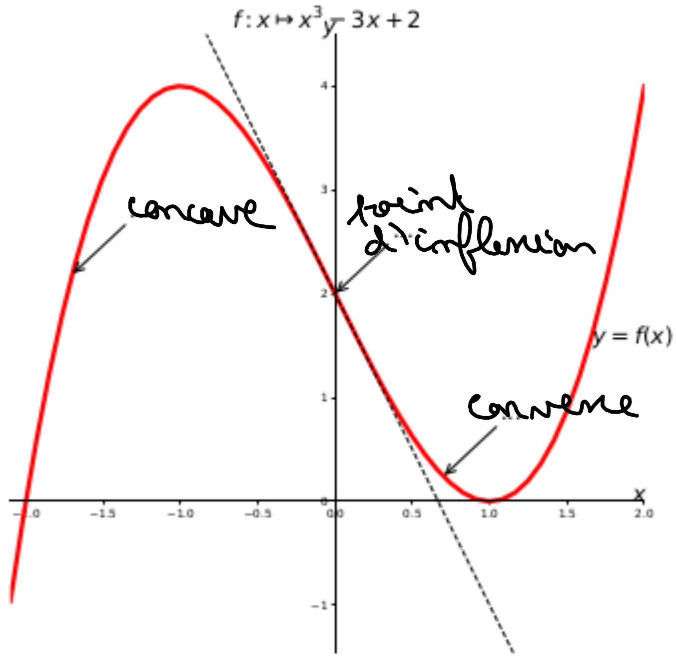


$f : x \mapsto x^3$ concave sur $]-\infty;0]$

$f : x \mapsto x^3$ convexe sur $[0;+\infty[$

2) Si f convexe sur I alors $-f$ concave sur I car la courbe de $-f$ est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

3)



Capacité ~~3~~ 2 *Lien entre convexité et sens de variation*

Compléter les phrases :

- Si f est convexe et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ..vite
- Si f est convexe et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ..lentement
- Si f est concave et croissante sur un intervalle I, alors f croît de plus en plus ..lentement
- Si f est concave et décroissante sur un intervalle I, alors f décroît de plus en plus ..vite

Capacité ~~9~~ 3 *Esquisser $\mathscr{C}_f$ à partir des tableaux de variations de f, f' ou f'', voir capacité 6 p.207*

1. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations ainsi que le tableau de variations de sa dérivée f' :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-2	↗	0

erreur $f'(x)$ →

x	-5		0		3		5
$\cancel{f''(x)}$	3	↘	-2	↗	2	↘	0
		concave		convexe		concave	

Déterminer la convexité de la fonction f et tracer dans un repère une courbe possible pour f.

2. On considère une fonction g deux fois dérivables sur $[-2;6]$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations de g et g''.

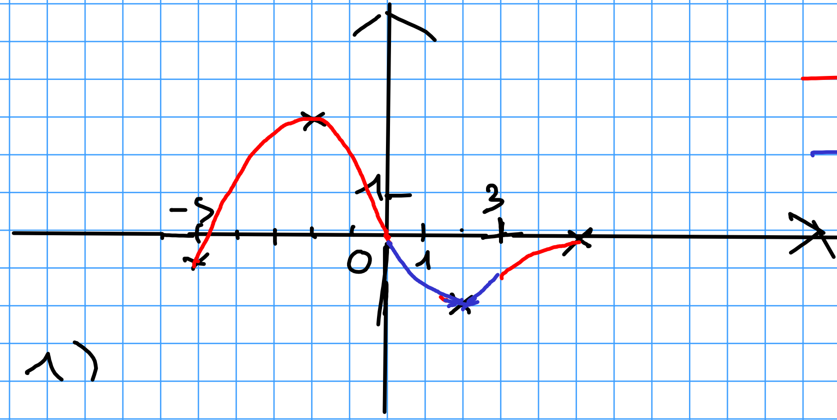
convexe ⟷ concave ⟷ convexe

x	-2		0		3		4		6
$g''(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

x	-2		-1		0		2		4		6
$g(x)$	1	↘	-4	↗	3	↗	5	↘	2	↘	0

Déterminer la convexité de la fonction g et tracer dans un repère une courbe possible pour g.

1) • f' décroissante sur $[-5;0]$ et $[3;5]$ donc f concave sur ces intervalles.
• f' croissante sur $[0;3]$ donc f convexe sur cet intervalle.

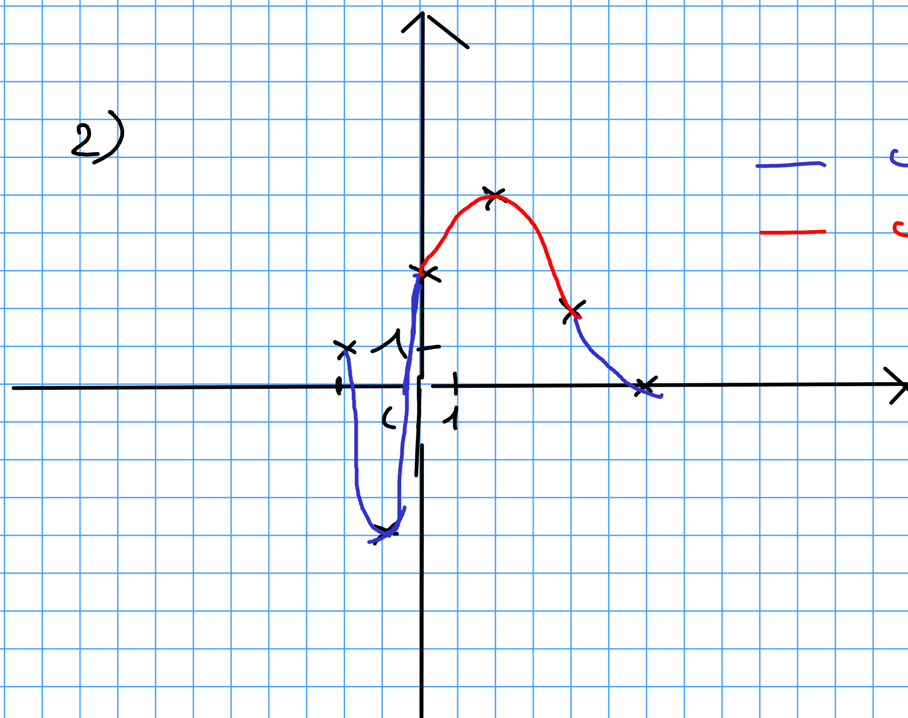


— f concave

— f convexe

1)

2)



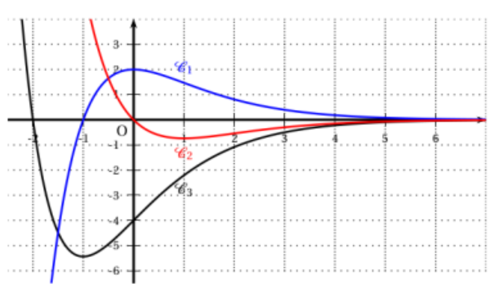
— convexe

— concave

Capacité 5 ***Lier une représentation graphique de f, f' ou f''***

On considère une fonction f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.



2. On admet que pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)e^{-x}$.

   a. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire l'étude de la convexité de f et des éventuels points d'inflexions de sa courbe. Vérifier les conjectures établies à la question 1.

1) $\mathcal{C}_1$ représente f'
$\mathcal{C}_3$ représente f
et $\mathcal{C}_2$ représente f''.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗			
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	

f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

2) Pour tout réel x, on a $f(x) = (-2x-4)e^{-x}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

$u(x) = -2x-4$ $\qquad$ $v(x) = e^{-x}$
$u'(x) = -2$ $\qquad$ $v'(x) = -e^{-x}$

$f = u'v + uv'$

donc $f'(x) = -2e^{-x} + (-e^{-x})(-2x-4)$
$f'(x) = e^{-x}(-2+2x+4) = e^{-x}(2+2x)$

puis $f''(x) = -e^{-x}(2+2x) + 2e^{-x} = -2xe^{-x}$

On peut alors retrouver les signes de f'' et de f'

et en déduire la convexité et les variations de f.

Capacité ~~12~~ 6 *Démontrer une inégalité de convexité, voir capacité 7 p.208*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Déterminer des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x puis étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $e^{-x} \geqslant 1 - x$.
4. Démontrer que pour tous réels a et b, $e^{-\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^{-a} + e^{-b}}{2}$.

1) f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x :

$f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}$

2) Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x+1$$

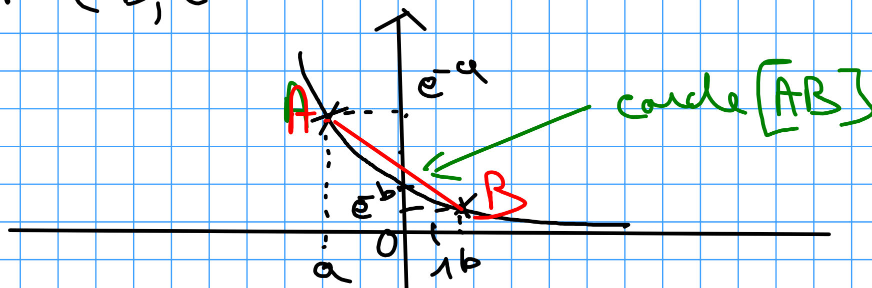
3) Pour tout réel x, on a $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

On en déduit l'inégalité de convexité : pour tout réel x, $e^{-x} \geqslant 1-x$.

4) f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses cordes.

Considérons la corde $[AB]$ avec $A(a; e^{-a})$

et $B(b; e^{-b})$



Le milieu I de la corde [AB] a pour coordonnées:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{e^{-a} + e^{-b}}{2} \end{cases} \qquad I\left(\frac{a+b}{2}; \frac{e^{-a}+e^{-b}}{2}\right)$$

Par convexité de f, le point de C_f de même abscisse que I est en-dessous de I et donc son ordonnée $e^{-\frac{a+b}{2}}$ est inférieure ou égale à celle de I.

On en déduit que : $e^{-\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^{-a}+e^{-b}}{2}$