Certains exercices sont inspirés du cahier de calcul de Terminale, coordonné par Colas Bardavid https://colasbd.github.io/cdc-lycee/.
Correction des deux derniers exercices copiées depuis le site de l'APMEP : https://www.apmep.fr/Annee-2024.

Exercice 1 *Signe du logarithme népérien*

On utilise pour chaque question que ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et que $\ln(1)=0$.

1. $\ln(2)>0$ car $2>1$.
2. $\ln(0,99)<0$ car $0,99<1$.
3. $(\ln(0,6))^2>0$ car $\ln(0,6)<0$ et son carré est positif.
4. $\ln(0,6^2)=\ln(0,36)<0$ car $0,36<1$.
5. $\ln(3)-1=\ln(3)-\ln(e)$ qui est strictement positif car $3>\mathrm{e}$.
6. $\ln(1-\ln(0,1))>0$ car $\ln(0,1)<0$ donc $1-\ln(0,1)>1$ donc $\ln(1-\ln(0,1))>0$.
7. $\ln(\ln(2))<0$ car $\ln(2)\in(0,1)$ donc $\ln(\ln(2))<0$.
8. $\ln(-\ln(1/3))=\ln(\ln(3))$ or $3>\mathrm{e}$ donc $\ln(3)>1$ donc $\ln(\ln(3))>0$.

Exercice 2 *Équations*

1. $\ln(1-\ln(x))=\ln(3)$

1. Domaine : $1-\ln(x)>0 \iff \ln(x)<1 \iff x\in(0,e)$.
2. On résout : $1-\ln(x)=3$ donc $\ln(x)=-2$ donc $x=e^{-2}$.
3. Intersection : $e^{-2}\in(0,e)$, donc $\mathscr{S}=\{e^{-2}\}$.

2. $\ln(\dfrac{x+1}{3x-5})=0$

1. Domaine : $\dfrac{x+1}{3x-5}>0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$.
2. On résout : $\dfrac{x+1}{3x-5}=1$ donc $x=3$.
3. Intersection : $3\in(\frac{5}{3},+\infty)$, donc $\mathscr{S}=\{3\}$.

3. $(\ln(x))^2-\ln(x)=6$

1. Domaine : $x>0$.
2. On résout :poser $t=\ln(x)$ donne $t^2-t-6=0$ donc $t\in\{3,-2\}$ donc $x\in\{e^3,e^{-2}\}$.
3. On prend l'intersection des solutions trouvées avec le domaine de résolution pour déterminer l'ensemble des solutions : ces deux valeurs sont >0, donc $\mathscr{S}=\{e^3,e^{-2}\}$.

Exercice 3 *Inéquations*

1. $\ln(x^2) \geq 0$

1. Domaine : $x \neq 0$.
2. On résout : $x^2 \geq 1 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
3. On prend l'intersection des solutions trouvées avec le domaine de résolution pour déterminer l'ensemble des solutions : $\mathscr{S} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2. $0 \leq \ln(3x+5) \leq 4$

1. Domaine : $3x + 5 > 0 \iff x > -5/3$.
2. On résout :
$$\ln(3x+5) \geq 0 \iff 3x+5 \geq 1 \iff x \geq -4/3,$$
$$\ln(3x+5) \leq 4 \iff 3x+5 \leq e^4 \iff x \leq \frac{e^4-5}{3}.$$
3. On prend l'intersection des solutions trouvées avec le domaine de résolution pour déterminer l'ensemble des solutions : $\mathscr{S} = [-4/3, (e^4-5)/3]$.

3. $\ln(x+4) > \ln(3x-1)$

1. Domaine : $x > -4$ et $x > 1/3$ donc $x > 1/3$.
2. Inéquation : $x + 4 > 3x - 1 \iff x < 5/2$.
3. On prend l'intersection des solutions trouvées avec le domaine de résolution pour déterminer l'ensemble des solutions : $\mathscr{S} = (1/3, 5/2)$.

4. $\ln(x) + \ln(x+3) < \ln(2)$

1. Domaine : $x > 0$.
2. Inéquation : $\ln[x(x+3)] < \ln 2 \iff x(x+3) < 2 \iff x \in \big(0, (\sqrt{17}-3)/2\big)$.
3. On prend l'intersection des solutions trouvées avec le domaine de résolution pour déterminer l'ensemble des solutions : $\mathscr{S} = (0, (\sqrt{17}-3)/2)$.

Exercice 4 *Étude d'une suite*

Pour tout entier naturel $n \geq 0$:

1. $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 1) = \frac{1}{2} v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $1/2$.
2. $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = (1/2)^n$ et $u_n = \exp(v_n + 1) = \exp\big(1 + (1/2)^n\big)$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (1/2)^n = 0$, donc par composition $\lim u_n = e$.

Exercice 5 *Dérivation I*

1. $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$.

2. $f'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right)$.

3. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

4. $f'(x) = \dfrac{4(\ln x)^3}{x}$.

5. $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

6. $f'(x) = -\dfrac{5}{x(\ln x)^6}$.

Exercice 6 *Équation différentielle*

Soit f une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$, solution de l'équation (E). Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = f(x)\left(1 - \ln(f(x))\right)$$

Si on pose $g(x) = \ln(f(x))$ alors : $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $(f > 0)$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = f(x)\left(1 - \ln(f(x))\right) \iff \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \ln(f(x)) \iff g'(x) = 1 - g(x)$$

On reconnaît une équation (F) différentielle linéaire du type $g' + g = 1$.

- Résolution de l'équation homogène : $g_h' + g_h = 0$ a pour solutions les fonctions g_h définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g_h(x) = C\,e^{-x}$ avec C constante réelle.

- Recherche d'une solution particulière constante : soit p constante et g_p solution de (F) telle que pour tout réel $x > 0$, $g_p(x) = p$. On a pour tout réel $x > 0$: $g_p'(x) + g_p(x) = 1 \iff g_p(x) = 1$. La fonction constante égale à 1 est donc solution de (F).

- Par principe de superposition, le solutions de l'équation (F) sont définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = g_h(x) + g_p(x) = Ce^{-x} + 1$ avec C constante réelle.

Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont définies sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \exp\left(g(x)\right) = e\,\exp\left(Ce^{-x}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 *Somme télescopique*

Pour tout entier $k \geq 2$:

1. $1 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k}$.

2. $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln k$.

3.

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(k-1) - \ln k\right] = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n-1) - \ln n).$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent, il reste

$$S_n = \ln 1 - \ln n = -\ln n.$$

Exercice 8 *Asie juin 2024 sujet 2*

Partie A :

1. • Limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - x\ln(x) = 0$

• Limite en $+\infty$:

$f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1\times\ln(x) - x\times\dfrac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x - 1$:

$$\begin{aligned} 2x - 1 > 0 &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\times\dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$

On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f'	‖	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

   Déterminons le signe de $x - 1$:

   $x - 1 > 0 \iff x > 1$

   L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

   $g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

   On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x = x^2 - x\ln(x) \\ &\iff 0 = x^2 - x - x\ln(x) \\ &\iff 0 = x(x - 1 - \ln(x)) \\ &\iff 0 = x - 1 - \ln(x) \quad \text{car } x > 0 \quad \text{donc } x \neq 0 \\ &\iff 1 = x - \ln(x) \\ &\iff 1 = g(x) \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

   L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$, cette solution est $x = 1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   Initialisation : Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$.

   On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

   Par hypothèse de récurrence on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$

car f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

$$\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$

car f est la fonction de récurrence de la suite (u_n)

$$\implies \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$

car $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,60 > \frac{1}{2}$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$

2. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1}.$ La suite (u_n) est donc croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$ La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\ ;\ +\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

Exercice 9 *Métropole juin 204 J2*

Partie A : étude de la fonction f.

1. On a : $\lim\limits_{x\to -2} x^2 + 2x - 1 = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = -1$, car $x \longmapsto x^2 + 2x - 1$ est une fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment continue en -2.

de plus : $\lim\limits_{x\to -2} (x+2) = 0$

et donc, par composition : $\lim\limits_{x\to -2} \ln(x+2) = \lim\limits_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$

finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = -2$.

2. *Remarque :* la justification de la dérivabilité de f, donnée ci-après, n'est généralement pas attendue.

La fonction $x \longmapsto \ln(x+2)$ est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que composée de $x \longmapsto x+2$ définie et dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, où la fonction ln est définie et dérivable.

f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et une fonction composée).

$$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\quad \begin{aligned} f'(x) &= 2x+2+0+\frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2+6x+5}{x+2}. \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression attendue pour la fonction dérivée f'.

3. Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $x+2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de son numérateur. Ledit numérateur étant une expression polynomiale de degré 2 ayant un coefficient dominant (2) positif, cela signifie que les images seront positives, sauf entre d'éventuelles racines.

Déterminons le discriminant du numérateur : $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4 < 0$.

Le trinôme n'a donc pas de racines réelles, et a donc des images strictement positives pour tout x réel.

f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $]-2\,;\,+\infty[$, et f est donc strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.

On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	-2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$
variations de f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

4. La fonction f est continue (car dérivable) sur $]-2\,;\,+\infty[$, de plus, elle est strictement croissante sur cet intervalle et enfin, 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-2} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-2\,;\,+\infty[$, que l'on notera α.

Avec une exploration à la calculatrice (éclairée par notre lecture graphique de la partie A), on trouve $0,115 < \alpha < 0,12$, donc une valeur approchée à 10^{-2} de α est $0,12$.

5. Puisque f est strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} -2 < x < \alpha &\implies f(x) < f(\alpha) \\ &\implies f(x) < 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \alpha < x &\implies f(\alpha) < f(x) \\ &\implies 0 < f(x) \end{aligned}$$

f est donc à valeurs strictement négatives sur $]-2\,;\,\alpha[$, nulle pour $x = \alpha$ et à valeurs strictement positives sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

6. Pour étudier la présence d'un point d'inflexion, on va étudier le signe de la dérivée seconde de f, notée f''.

f est deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, car sa dérivée première est une fraction rationnelle, et donc f' est dérivable partout où elle est définie.

$$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\quad f''(x) = \frac{(4x+6)\times(x+2)-(2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $(x+2)^2$ est une quantité strictement positive, donc le signe de $f''(x)$ est le signe de son numérateur, un polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est strictement positif, dont les images sont strictement positives, sauf entre ses deux éventuelles racines.

Le discriminant est : $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 7 = 8\times 8 - 8\times 7 = 8 > 0$.

Le trinôme a exactement deux racines réelles distinctes, et donc s'annule en changeant de signe deux fois, pour :

$x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{8}}{2\times 2} = \dfrac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{8}}{2\times 2} = \dfrac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La valeur x_1 est manifestement strictement inférieure à -2, et donc :

Sur $\left]-2\,;\,-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, f'' est à valeurs strictement négatives, on a $f''\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ et sur $\left]-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$, f'' est à valeurs strictement positives.

Ainsi, f est concave sur $\left]-2\,;\,-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et convexe sur $\left]-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$ et donc son unique point d'inflexion est le point d'abscisse $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : On a : $-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$, ce qui n'est pas incohérent avec l'estimation graphique formulée en partie A dans ce corrigé.

Partie B : une distance minimale.

1. Le point J a pour coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et M a pour coordonnées $\big(x\ ;\ g(x)\big)$.

   Comme on est dans un repère orthonormé, on a : $\quad \mathrm{J}M = \sqrt{(x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2}$

   Donc, $\quad \forall x \in]-2\ ;\ +\infty[, \quad h(x) = \mathrm{J}M^2$
   $$\begin{aligned} &= (x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2 \\ &= (x-0)^2 + \big(g(x)-1\big)^2 \\ &= x^2 + \big[\ln(x+2)-1\big]^2. \end{aligned}$$

   On arrive bien à l'expression attendue.

2. **a.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et la distance $\mathrm{J}M$ est nécessairement positive, en tant que distance.
   Donc $\mathrm{J}M_{x_1} \leqslant \mathrm{J}M_{x_2} \iff \mathrm{J}M_{x_1}^2 \leqslant \mathrm{J}M_{x_2}^2$.
   La distance $\mathrm{J}M$ sera donc minimale pour la valeur x qui rend minimale le carré de cette distance, c'est-à-dire $h(x)$.
   On sait que, pour tout x dans $]-2\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2}{x+2}$ est strictement positif, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.
   On peut donc établir le tableau suivant :

x	-2		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de h	‖	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

   b. Comme h est décroissante sur $]-2\ ;\ \alpha[$ et croissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, la valeur de x pour laquelle la distance $\mathrm{J}M$ est minimale est donc bien le nombre α, solution de l'équation $f(x) = 0$, défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. **a.** On sait que α est la solution de l'équation $f(x) = 0$.
   $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2) = 0 \\ &\iff \ln(x+2) = 1 - 2x - x^2 \end{aligned}$$
   Comme α est solution de cette équation, on en déduit bien :
   $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

   b. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur : $\quad g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+2}$.
   La droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ a pour coefficient directeur :
   $$\frac{y_{M_\alpha} - y_\mathrm{J}}{x_{M_\alpha} - x_\mathrm{J}} = \frac{g(\alpha)-1}{\alpha - 0} = \frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha} = \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha} = \frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha} = -2-\alpha.$$
   Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc : $\quad \dfrac{1}{\alpha+2} \times (-2-\alpha) \ = \ -1.$
   On en déduit dont que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.
   Remarque : on aurait aussi pu mobiliser des connaissances du programme de première et utiliser des vecteurs normaux ou des vecteurs directeurs de ces deux droites, et en calculer le produit

scalaire (entre les deux vecteurs directeurs, ou entre les deux vecteurs normaux) ou vérifier la colinéarité (entre le vecteur directeur de l'une et le vecteur normal de l'autre), pour arriver à la même conclusion.