Les corrigés des exercices 1 à 11 ont été générés par Chat GPT o3-mini et retouchés par mes soins (ajustement plus ou moins important de la rédaction et vérification des calculs qui globalement étaient justes). Ce n'est donc pas le produit direct d'une IA générative. Il y a un raffinement (requêtes secondaires pour préciser) et un post-traitement. Les corrigés des exercices 12f à 14 sont des copies de ceux disponibles sur le site de l'APMEP dont je suis adhérent.

Exercice 1 *Intégrale d'une fonction usuelle* ☆

Calculer les intégrales suivantes en déterminant d'abord une primitive, puis en présentant le résultat selon :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a) = \text{(valeur exacte)}$$

1. $\displaystyle\int_0^2 \pi\,\mathrm{d}x$

Solution :

$\displaystyle\int_0^2 \pi\,dx = \Big[\pi x\Big]_0^2 = \pi\times 2-\pi\times 0 = 2\pi.$

2. $\displaystyle\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$

Solution :

$\displaystyle\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2}-0 = \frac{9}{2}.$

3. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$

Solution :

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-0 = \frac{1}{3}.$

4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Solution :

$\displaystyle\int_1^4 x^{-1/2}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4 = 2\sqrt{4}-2\sqrt{1} = 4-2 = 2.$

5. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Solution :

Une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$.

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,dx = \Big[x\ln(x)-x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \Big[\mathrm{e}\cdot 1-\mathrm{e}\Big]-\Big[1\cdot 0-1\Big] = 0-(-1) = 1.$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

Solution :

$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi} = \sin(\pi)-\sin(0) = 0-0 = 0.$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

Solution :

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = \Big[-\cos(\pi)\Big] - \Big[-\cos(0)\Big] = -(-1)-(-1) = 1+1 = 2.$$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Solution :

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-1}^{1} = \left[-\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[-\mathrm{e}^{1}\right] = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 2 *Intégrales avec paramètres* ☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n les intégrales

$$I_n = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_1^2 \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Pour I_n :

On a :

$$I_n = \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}.$$

Pour J_n :

On écrit

$$J_n = \int_1^2 \frac{1}{t^n}\,dt = \int_1^2 t^{-n}\,dt.$$

Pour $n \neq 1$, une primitive est $\dfrac{t^{-n+1}}{-n+1}$. Ainsi,

$$\int_1^2 t^{-n}\,dt = \left[\frac{t^{1-n}}{1-n}\right]_1^2 = \frac{2^{1-n}-1}{1-n} = \frac{1-2^{1-n}}{n-1}.$$

Exercice 3 *Intégrale d'une somme* ☆

Calculer les intégrales suivantes en déterminant d'abord une primitive.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{1} 3x^2 - 5x + 1\,\mathrm{d}x$

Solution :

Une primitive de $3x^2 - 5x + 1$ est

$$F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x.$$

Ainsi,

$$\int_{-2}^{1} (3x^2 - 5x + 1)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-2}^{1} = \left[1 - \frac{5}{2} + 1\right] - \left[(-8) - \frac{5}{2}\cdot 4 - 2\right] = -\frac{1}{2} - (-20) = \frac{39}{2}.$$

2. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$

Solution :

Une primitive est

$$F(x)=\frac{x^5}{15}+\frac{x}{2}.$$

Donc,

$$\int_0^3\left(\frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}\right)dx \;=\; \left[F(x)\right]_0^3 \;=\; \frac{3^5}{15}+\frac{3}{2}-0 \;=\; \frac{243}{15}+\frac{3}{2} \;=\; \frac{81}{5}+\frac{3}{2} \;=\; \frac{177}{10}.$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$

Solution :

Primitive du premier terme e^{4x} :

C'est $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}$

Primitive du second terme e^{-2x+1} :

On écrit $\mathrm{e}^{-2x+1}=\mathrm{e}^1\mathrm{e}^{-2x}$, et ainsi une primitive est :

$$\mathrm{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]$$

On obtient donc :

$$\int_0^1\left(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{-2x+1}\right)dx \;=\; \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}-\frac{\mathrm{e}}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1.$$

En évaluant aux bornes, on obtient :

$$\int_0^1\left(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{-2x+1}\right)dx \;=\; \left[\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{\mathrm{e}}{2}\mathrm{e}^{-2}\right]-\left[\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{e}}{2}\right].$$

4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}x$

Solution :

On a :

$$\int_1^4\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx \;=\; \left[4\sqrt{x}-\frac{1}{x}-2x^{-2}\right]_1^4.$$

Calculons aux bornes :

- **pour** $x=4$ **:** $4\sqrt{4}-\frac{1}{4}-2(4^{-2})=8-\frac{1}{4}-\frac{2}{16}=8-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{61}{8}$.
- **pour** $x=1$ **:** $4-\ 1-\ 2=1$.

La différence donne :

$$\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{61}{8}-1 \;=\; \frac{53}{8}.$$

Exercice 4 *Intégrale d'une somme* ☆☆

1. **(Question 1)** Soit
$$I=\int_0^2 2t\,\mathrm{d}t+\int_0^2 3t^2\,\mathrm{d}t+\int_0^2 4t^3\,\mathrm{d}t+\ldots+\int_0^2 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t.$$

Solution :

Pour tout entier $k\in\{1,\ldots,n\}$, la $k^{\text{ième}}$ intégrale est
$$\int_0^2 (k+1)t^k\,dt \;=\; (k+1)\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^2 \;=\; 2^{k+1}.$$

Ainsi,
$$I \;=\; \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} \;=\; 2^2+2^3+\ldots+2^{n+1}.$$

Cette somme des termes consécutifs d'une suite géométrique se calcule par :
$$I \;=\; 4\frac{2^n-1}{2-1} \;=\; 4\left(2^n-1\right).$$

2. **(Question 2)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$

Étape 1 : On écrit l'intégrale :
$$\int_0^3\left(\frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}\right)dx.$$

Étape 2 : Une primitive est :
$$F(x)=\frac{x^5}{15}+\frac{x}{2}.$$

Étape 3 : On évalue aux bornes :
$$\Big[F(x)\Big]_0^3=\left(\frac{3^5}{15}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{0^5}{15}+\frac{0}{2}\right).$$

Étape 4 : Calcul final :
$$\frac{243}{15}+\frac{3}{2}=\frac{81}{5}+\frac{3}{2}=\frac{162+15}{10}=\frac{177}{10}.$$

3. **(Question 3)** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$

Étape 1 : Écrire l'intégrale comme somme de deux :
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,dx \;+\; \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x+1}\,dx.$$

Étape 2 : Trouver les primitives :

- Pour e^{4x} : une primitive est $\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{4}$.
- Pour e^{-2x+1} : on remarque que $\mathrm{e}^{-2x+1}=\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-2x}$ et une primitive de e^{-2x} est $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi, une primitive est $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

Étape 3 : Évaluer aux bornes :

$$\left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4},$$

et

$$\left[-\frac{e}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = \left(-\frac{e}{2}e^{-2}\right) - \left(-\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}\left(1 - e^{-2}\right).$$

Étape 4 : La valeur exacte de l'intégrale est donc

$$\int_0^1 e^{4x} + e^{-2x+1}\, dx = \frac{e^4 - 1}{4} + \frac{e}{2}\left(1 - e^{-2}\right).$$

4. (Question 4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\, dx$

On calcule une primitive de chaque terme :

Premier terme :

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ a pour primitive } 2 \times 2\sqrt{x}$$

Second terme :

$$\frac{1}{x^2} \text{ a pour primitive } -\frac{1}{x}$$

Étape 3 : Troisième terme :

$$\frac{4}{x^3} = 4x^{-3} \text{ a pour primitive } 4 \times \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = -2x^{-2}$$

Étape 4 : Évaluer aux bornes $x = 4$ et $x = 1$:

$$\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\, dx = \left[4\sqrt{x} - \frac{1}{x} - 2x^{-2}\right]_1^4 = F(4) - F(1)$$

Or on a :

$$F(4) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = 8 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{61}{8} \text{ et } F(1) = 4 - 1 - 2 = 1.$$

D'où,

$$\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\, dx = \frac{61}{8} - 1 = \frac{61-8}{8} = \frac{53}{8}.$$

Exercice 5 *Intégrale d'une dérivée de fonction composée* ☆☆

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

Solution :

Remarquons que la dérivée de $x^2 + 1$ est $2x$. Ainsi, en posant $u(x) = x^2 + 1$, on a :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ de primitive } \frac{1}{2}\left[2\sqrt{u(x)}\right] = \sqrt{x^2+1}.$$

Par conséquent,

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

2. $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

Solution :

En posant $u(t) = t^2$, alors $u'(t) = 2t$, donc une primitive de :

$$t\mathrm{e}^{t^2} = \frac{1}{2}u'(t)\mathrm{e}^{u(t)} \text{ de primitive } \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u(t)} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

3. $\displaystyle\int_{-2}^4 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$

Solution :

On remarque que la dérivée de t^2+t+1 est $2t+1$. Donc,

$$\frac{2t+1}{t^2+t+1} \text{ de primitive } \ln\left|t^2+t+1\right|.$$

Ainsi,

$$\int_{-2}^4 \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = \left[\ln\left|t^2+t+1\right|\right]_{-2}^4 = \ln(21)-\ln(3) = \ln(7).$$

4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\ln^3(x)\,\mathrm{d}x$

Solution :

En posant $u = \ln(x)$ (donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$), on obtient :

$$\frac{1}{x}\ln^3(x) = u'(x)u^3(x) \text{ de primitive } \frac{u^4(x)}{4}.$$

Ainsi,

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\ln^3(x)dx = \left[\frac{\ln^4(x)}{4}\right]_1^{\mathrm{e}^2} = \frac{(2)^4}{4} - 0 = \frac{16}{4} = 4.$$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$

Solution :

Avec $u(t) = t^2$, $u'(t) = 2t$, donc $2t\cos(t^2) = u'(t)\cos(u(t))$ de primitive $\sin(u(t)) = \sin(t^2)$ et donc :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t\cos(t^2)dt = \left[\sin(t^2)\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sin(\pi/4)-\sin(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

Solution :

Il y avait une typo dans l'énoncé, la borne supérieure est $\dfrac{\pi}{2}$, sinon l'intégrale vaut 0.

En posant $u(x) = \cos(x)$ on a $\sin(x)\cos^2(x) = -u'(x)u^2(x)$ dont une primitive est $-\dfrac{1}{3}u^3(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3(x)$.
On a donc en utilisant que $\cos(\pi/2) = 0$ et $\cos(-\pi/2) = 0$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\cos^3(\pi/2) - (-\frac{1}{3}\cos^3(-\pi/2)) = 0-0 = 0$$

Exercice 6 *Intégrales avec paramètres*

Soit $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Pour I_n :

En posant $u = \sin(t)$, $u'(t) = \cos(t)$ et les bornes $u(0) = 0$, $u(\pi/2) = 1$, on obtient :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} u^n(t)\,dt = \left[\frac{u^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}.$$

Pour J_n :

Posons $u(x) = \mathrm{e}^{-x}+1$, alors $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^n} = -\dfrac{u'(x)}{u^n(x)} = -u'(x)u^{-n}(x)$ qui admet pour primitive $-\dfrac{1}{-n+1}u^{-n+1}(x) = \dfrac{1}{n-1}u^{-n+1}(x)$.

$$J_n = \int_0^{\ln(3)} -\frac{u'(x)}{u^n(x)}du$$

Puis, avec la primitive on a :

$$J_n = \left[\frac{1}{1-n}u^{-n+1}(x)\right]_0^{\ln(3)} = \frac{(4/3)^{1-n} - 2^{1-n}}{n-1}.$$

Exercice 7 *Calcul d'une intégrale par décomposition*

1. **a)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

Méthode : On écrit $x = (x+1)-1$, ainsi

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Solution :

$$\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \int_1^2 1\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$$
$$= \Big[x\Big]_1^2 - \Big[\ln|x+1|\Big]_1^2 = (2-1) - \big(\ln 3 - \ln 2\big) = 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{x^2-2x}{\mathrm{e}^x+x^2}\,\mathrm{d}x$

Méthode suggérée : Écrire numérateur $= (\mathrm{e}^x+x^2) - (2x+\mathrm{e}^x)$ afin de décomposer la fraction en une somme de deux termes facilement intégrables.

Solution :

On a :

$$\frac{x^2-2x}{\mathrm{e}^x+x^2} = 1 - \frac{2x+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x^2}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x^2-2x}{e^x+x^2}\,dx = \Big[x\Big]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \frac{2x+e^x}{e^x+x^2}\,dx.$$

On constate que la dérivée du dénominateur $e^x + x^2$ est $2x + e^x$. Par conséquent,

$$\int \frac{2x+e^x}{e^x+x^2}\,dx = \ln\left|e^x+x^2\right|.$$

D'où,

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x^2-2x}{e^x+x^2}\,dx = \ln 2 - \Big[\ln\left(e^x+x^2\right)\Big]_0^{\ln 2}.$$

2. **a)** Déterminer a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$,

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}.$$

On a

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} = \frac{a(t+1)+bt}{t(t+1)}.$$

Pour que cette identité soit vraie, il faut :

$$a(t+1) + bt = 1 \quad \text{pour tout } t.$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on obtient :

$$(a+b)t + a = 1.$$

Ce qui donne le système

$$\begin{cases} a+b=0, \\ a=1. \end{cases}$$

D'où $a = 1$ et $b = -1$.

b) En déduire le calcul de

$$\int_3^4 \frac{1}{t(t+1)}\,dt.$$

On a donc :

$$\int_3^4 \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_3^4 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \Big[\ln|t| - \ln|t+1|\Big]_3^4.$$

Ainsi,

$$\int_3^4 \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \Big[(\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4)\Big] = 2\ln 4 - \ln 5 - \ln 3 = \ln\left(\frac{16}{15}\right).$$

Exercice 8 *Simple intégration par parties* ☆☆

Pour chacune des intégrales suivantes on applique la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

1) Exemple : $\displaystyle\int_0^1 t\,e^t\,dt$

Identification : Choisissons
$$u(t)=t \quad \text{et} \quad v'(t)=\mathrm{e}^t,$$
ainsi $u'(t)=1$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$.

Application :
$$I=\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t dt=\left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\mathrm{e}^t dt.$$
$$I=\left(1\cdot\mathrm{e}^1-0\right)-\left[\mathrm{e}^t\right]_0^1=\mathrm{e}-\left(\mathrm{e}-1\right)=1.$$

2) Exemple : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,\mathrm{d}t$

Identification : Choisissons
$$u(t)=\ln(t) \quad \text{et} \quad v'(t)=t,$$
donc $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v(t)=\dfrac{t^2}{2}$.

Application :
$$I=\int_1^{\mathrm{e}} t\ln(t)\,dt=\left[\ln(t)\cdot\frac{t^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{2}\,dt.$$
$$I=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}}$$
Après évaluation et simplification, on trouve la valeur exacte.

3) Exemple : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Identification : Choisissons
$$u(t)=\ln(t) \quad \text{et} \quad v'(t)=\frac{1}{t^2},$$
donc $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et une primitive de $v'(t)$ est $v(t)=-\dfrac{1}{t}$.

Application :
$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(t)}{t^2}\,dt=\left[\ln(t)\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t}\right)dt.$$
$$I=\left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^{\mathrm{e}}+\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{t^2}\,dt=\left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^{\mathrm{e}}+\left[\frac{-1}{t}\right]_1^{\mathrm{e}}$$
On évalue ensuite chaque terme pour obtenir la valeur exacte.

Exercice 9 *Double intégration par parties* ☆☆☆

Pour chacune des intégrales suivantes on applique deux fois la formule d'intégration par parties :
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

1. Nous voulons calculer
$$\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t \, dt.$$
Première intégration par parties :
Identification : Choisissons
$$u(t) = t^2 \quad \text{et} \quad v'(t) = \mathrm{e}^t,$$
d'où $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$.
Application :
$$\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t \, dt = \left[t^2 \mathrm{e}^t \right]_0^1 - \int_0^1 2t \mathrm{e}^t \, dt.$$
Deuxième intégration par parties sur $\int_0^1 2t\mathrm{e}^t \, dt$ **:**
Identification : Choisissons
$$u(t) = 2t \quad \text{et} \quad v'(t) = \mathrm{e}^t,$$
alors $u'(t) = 2$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$.
Application :
$$\int_0^1 2t \mathrm{e}^t \, dt = \left[2t \mathrm{e}^t \right]_0^1 - \int_0^1 2 \mathrm{e}^t \, dt.$$
L'intégrale restante s'évalue directement. Finalement, en remontant les étapes,
$$\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t \, dt = \mathrm{e} - \left(2\mathrm{e} - 2\right) = 2 - \mathrm{e}.$$

2. Soit
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos(t) \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin(t) \, dt.$$
Première intégration par parties sur I **:**
Identification : Choisissons
$$u(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \mathrm{e}^t,$$
d'où $u'(t) = -\sin(t)$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$.
Application :
$$I = \left[\cos(t)\mathrm{e}^t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(t)\mathrm{e}^t \, dt = \left[\cos(t)\mathrm{e}^t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin(t) \, dt.$$
Comme $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\cos(0) = 1$, on obtient :
$$I = -\mathrm{e}^0 + J = -1 + J.$$

Ensuite, pour J **:**
Identification : Choisissons
$$u(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \mathrm{e}^t,$$
donc $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$.
Application :
$$J = \left[\sin(t)\mathrm{e}^t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{e}^t \, dt.$$

Puisque $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(0) = 0$,

$$J = \mathrm{e}^{\pi/2} - I.$$

En combinant :
On a $I = -1 + J$ et $J = \mathrm{e}^{\pi/2} - I$. Ainsi,

$$I = -1 + (\mathrm{e}^{\pi/2} - I) \quad \Longrightarrow \quad 2I = \mathrm{e}^{\pi/2} - 1,$$

d'où

$$I = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2} - 1}{2} \quad \text{et} \quad J = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Exercice 10 *Linéarité de l'intégrale et inégalités* ☆ ☆

On considère la suite $\{v_n\}$ définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

1) (a) Montrer que $v_0 + v_1 = 1$.

Étape 1 – Écriture de v_0 et v_1 :

$$v_0 = \int_0^1 \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\, dx, \quad v_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Étape 2 – Identification de la relation : Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = 1.$$

Étape 3 – Intégration sur $[0, 1]$:

$$v_0 + v_1 = \int_0^1 1\, dx.$$

Étape 4 – Conclusion :

$$\int_0^1 1\, dx = 1.$$

Donc, $v_0 + v_1 = 1$.

1) (b) Calcul de v_1 et déduction de $v_0 = \ln\left(\frac{1 + \mathrm{e}}{2}\right)$.

Étape 1 – Écriture de v_1 :

$$v_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Étape 2 - identification d'une primitive de dérivée de fonction composée
Posons $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$. On a $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ donc $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$.
Une primitive est $-\ln(\left| u(x) \right|) = -\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ car $u(x) > 0$.

Étape 3 : calcul de l'intégrale v_1 On en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = \ln(2) - \ln\left(1+e^{-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right).$$

Étape 4 : Calcul de v_0

Puisque $v_0 + v_1 = 1$ et en notant $1 = \ln(e)$, on a :

$$v_0 = \ln(e) - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e(e+1)}{2e}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

2) Montrer que pour tout entier naturel n**, on a** $v_n \geq 0$**.**

Étape 1 – Observation : Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} \geq 0$ et $1+e^{-x} > 0$.

Étape 2 – Conclusion : Ainsi, l'intégrande $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$ et donc $v_n \geq 0$.

3) (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$**,**

$$v_{n+1} + v_n = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Étape 1 – Écriture de $v_{n+1} + v_n$ **:**

$$v_{n+1} + v_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx.$$

Étape 2 – Regroupement : Factorisons e^{-nx} dans le numérateur :

$$v_{n+1} + v_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}\left(e^{-x}+1\right)}{1+e^{-x}}dx.$$

Étape 3 – Simplification :

$$v_{n+1} + v_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx.$$

Étape 4 – Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

3) (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$**,**

$$v_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

Étape 1 – Remarque : Puisque $v_{n+1} \geq 0$, on a $v_n + v_{n+1} \geq v_n$.

Étape 2 – Conclusion : D'où, avec $v_n + v_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$,

$$v_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

4) Déterminer la limite de la suite $\{v_n\}$.

Étape 1 – Encadrement :

$$0 \leq v_n \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

Étape 2 – Limite de la borne supérieure : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0$.

Étape 3 – Application du théorème des gendarmes : Par encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Exercice 11 *Suite d'intégrale*

Déterminer le sens de variation de chacune des suites d'intégrales définies pour tout entier $n \geq 0$:

1. $I_n = \displaystyle\int_1^n \ln(x)\,dx$. **2.** $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,dt$. **3.** $K_n = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,dx$. **4.** $L_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,dx$.

1) Étude de $I_n = \displaystyle\int_1^n \ln(x)\,dx$.

Étape 1 – Expression de la différence $I_{n+1} - I_n$:
On a, par la propriété de Chasles,

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \ln(x)dx - \int_1^n \ln(x)dx = \int_n^{n+1} \ln(x)dx.$$

Étape 2 – Analyse de l'intégrande sur $[n, n+1]$:
Pour tout $n \geq 1$ et pour $x \in [n, n+1]$, on a $x \geq 1$ donc $\ln(x) \geq \ln(1) = 0$.

Étape 3 – Conclusion sur la différence :
Ainsi,

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} \ln(x)dx \geq 0.$$

Étape 4 – Conclusion sur la suite :
La suite (I_n) est donc croissante.

2) Étude de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,dt$.

Étape 1 – Comparaison des intégrandes pour n et $n+1$:
Soit $t \in [0,1]$. Pour $n \geq 0$ et $t < 1$, on remarque que $t^{n+1} \leq t^n$ (puisque l'exposant plus élevé rend la valeur plus petite). Ainsi,

$$1 + t^{n+1} \leq 1 + t^n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t^{n+1}} \geq \frac{1}{1+t^n}.$$

Étape 2 – Passage à l'intégrale :
On en déduit par croissance de l'intégrale :

$$J_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{n+1}}\,dt \geq \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,dt = J_n.$$

Étape 3 – Conclusion sur la suite :
La suite (J_n) est croissante.

3) Étude de $K_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,dx$.

Étape 1 – Comparaison des intégrandes pour n et $n+1$:

Pour $n \geq 0$ et tout $-1 \leqslant x \leqslant 0$ on a :
$(n+1)x \leqslant nx$ donc $\mathrm{e}^{(n+1)x} \leqslant \mathrm{e}^{nx}$ par croissance de l'exponentielle.
On en déduit par décroissance de la fonction inverse que :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{(n+1)x}}$$

Étape 2 – Passage à l'intégrale :
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$K_n = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,dx \leqslant \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{(n+1)x}}\,dx = K_{n+1}\,.$$

Étape 3 – Conclusion sur la suite :
La suite (K_n) est croissante.

4) Étude de $L_n = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,dx$.

Étape 1 – Comparaison des intégrandes :

Pour $n \geq 0$ et tout $0 \leqslant x \leqslant 1$ on a :
$x \leqslant (n+1)x$ donc $\mathrm{e}^{)x} \leqslant \mathrm{e}^{(n+1)x}$ par croissance de l'exponentielle.
On en déduit par décroissance de la fonction inverse que :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{(n+1)x}} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}$$

Étape 2 – Passage à l'intégrale :
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$L_{n+1} = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{(n+1)x}}\,dx \leqslant \int_{0}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,dx = L_n\,.$$

Étape 3 – Conclusion sur la suite :
La suite $\{L_n\}$ est décroissante.

Exercice 12 *Calcul de volume*

Métropole Septembre 2024 J1.

1. **a.** Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$, et si $x \in [-1\,;\,1]$, on a $1 - x^2 \geqslant 0$.
Donc pour tout x de $[-1\,;\,1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$.

On pose $u(x) = 1 - x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

Par intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$.

Donc $I = \left[(1-x^2)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1}(-2x)\mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 0 + 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm³, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathcal{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm², de la surface colorée.

On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$ par une intégration par parties.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned} int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}} &= \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \times \mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \left[\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = \left[1\mathrm{e}^1 - (-1)\mathrm{e}^{-1}\right] - \left[\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}\right] \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Donc $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 4\mathrm{e}^{-1}$.

$\mathcal{V} = 3 \times S = 12\mathrm{e}^{-1}$ donc $\mathcal{V} \approx 4,4$ cm^3.

Exercice 13 *Encadrement d'une aire* ☆☆

Métropole juin 2024 J1.

1. En posant $u(x) = x^2 + 1$ et avec $u'(x) = 2x$, on obtient :

$\left[\ln(u)\right]' = \dfrac{u'}{u}$ donc $\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :

pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1$ donc $x^2 + 1 > 0$.

Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x) \geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

f étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2;4]$, donc I est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement : $0,5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x + 0,25$.

Sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$0,5x-1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x+0,25 \text{ donc } \int_2^4 (0,5x-1)\underset{\cdot}{x} \leqslant \int_2^4 f(x)\underset{\cdot}{x} \leqslant \int_2^4 (0,25x+0,25)\underset{\cdot}{x}$$

$$\text{donc } \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8}+0,25x\right]_2^4$$

$$\text{donc } 4-4-(1-2) \leqslant I \leqslant 2+1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{donc } 1 \leqslant I \leqslant 2$$

Exercice 14 *Amérique du Nord J1 mai 2024* ☆ ☆

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} 1\times\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi-(-\cos 0) = 1+1 = 2.$

2. **a.** On sait que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ par produit par $\mathrm{e}^{-nx} > 0$: la fonction à intégrer étant positive et l'intervalle d'intégration étant croissant on sait que l'intégrale de cette fonction positive est positive. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1}-I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\left[\mathrm{e}^{-(n+1)x}-\mathrm{e}^{-(nx)}\right]\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale, puis

$I_{n+1}-I_n = \displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{e}^{-(nx)}\left[\mathrm{e}^{-x}-1\right]\mathrm{d}x.$

Soit u la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x}-1$.

u est dérivable sur $[0\,;\,\pi]$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$. La fonction u est donc décroissante de $\mathrm{e}^{-0}-1 = 0$ à $\mathrm{e}^{-\pi}-1 \approx -0,957$.

Comme $\sin x\mathrm{e}^{-(nx)} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x}-1 < 0$, la fonction à intégrer dans $I_{n+1}-I_n$ est négative et donc $I_{n+1}-I_n \leqslant 0$.

c. On vient de démontrer que $I_{n+1}-I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$, c'est-à-dire que la suite (I_n) est décroissante ; étant minorée par zéro elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3. **a.** On a déjà vu que que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$, donc par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,+\pi]$ on obtient

$\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-n\pi}\,\mathrm{d}x.$

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

b. Une primitive de e^{-nx}est $\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$, donc pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi}-\mathrm{e}^{0}\right] = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi}-1\right] = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-n\pi} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$.
D'après le théorème des « gendarmes » la suite (I_n) a pour limite 0.

4. **a.** • IPP1 On pose :

$u(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v'(x) = \sin x$
$u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad v(x) = -\cos x$

On a donc $I_n = \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n =$
$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$.

• IPP2 On pose :

$u(x) = \sin x$ $\quad v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
$u'(x) = \cos x$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$

On a donc $I_n = \left[\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}J_n$.

b. En égalant les deux valeurs de I_n trouvées on obtient :

$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \dfrac{1}{n}J_n \iff 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} = J_n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

$\iff J_n\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} \iff J_n = \dfrac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right]$.

En, reportant dans l'expression $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, on obtient finalement :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right] = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     while I >= 0.1 :
6         n=n+1
7         I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n
```