Les corrigés des exercices 1 à 3 ont été générés par Chat GPT o3-mini et retouchés par mes soins. Les corrigés des exercices 4, 5 et 6 sont des copies de ceux disponibles sur le site de l'APMEP dont je suis adhérent.

Préambule

Les solutions ci-dessous détaillent les démarches à suivre pour résoudre chacun des exercices de la fiche. Rappel : pour déterminer l'équation d'un plan connaissant un vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a, b, c)$ et un point $A(x_A, y_A, z_A)$, on part de l'équation générale

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Le paramètre d se calcule en imposant que A appartienne au plan, c'est-à-dire

$$d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

Exercice 1 *Équation cartésienne de plan* ☆☆

1. **Étude de la perpendicularité de plans.** On considère les plans

$$\mathscr{P}_1 : x + y + z + 3 = 0, \quad \mathscr{P}_2 : 2x - y + 5 = 0, \quad \mathscr{P}_3 : x - 2y + z - 3 = 0.$$

Pour chaque plan, le vecteur normal, noté $\overrightarrow{n}$, est constitué des coefficients des variables.

- Pour $\mathscr{P}_1$, $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$.
- Pour $\mathscr{P}_2$, $\overrightarrow{n_2} = (2, -1, 0)$.
- Pour $\mathscr{P}_3$, $\overrightarrow{n_3} = (1, -2, 1)$.

a. Pour $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, on calcule

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0.$$

donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires.

b. Pour $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$,

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont perpendiculaires.

c. Pour $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$,

$$\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_3} = 2 \times 1 + (-1) \times (-2) + 0 \times 1 = 2 + 2 + 0 = 4 \neq 0.$$

donc $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ ne sont pas perpendiculaires.

2. **Équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal.** Rappelons que l'équation d'un plan dont le vecteur normal est $\overrightarrow{n}\,(a, b, c)$ et qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$ est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec} \quad d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

a. Pour $A(2, 5, 6)$ et $\overrightarrow{n}\,(2, -1, 2)$, on a :

$$d = -(2 \times 2 + (-1) \times 5 + 2 \times 6) = -(4 - 5 + 12) = -11.$$

L'équation du plan est donc

$$2x - y + 2z - 11 = 0.$$

$$\boxed{2x - y + 2z - 11 = 0.}$$

b. Pour $A(1,-2,3)$ et $\overrightarrow{n}(2,-1,2)$, on calcule :

$$d = -(2\times 1 + (-1)\times(-2) + 2\times 3) = -(2+2+6) = -10.$$

L'équation du plan est

$$2x - y + 2z - 10 = 0,$$

$$\boxed{2x - y + 2z - 10 = 0.}$$

c. Pour $A(2,-4,5)$ et $\overrightarrow{n}(5,6,0)$, on trouve :

$$d = -(5\times 2 + 6\times(-4) + 0\times 5) = -(10-24+0) = 14.$$

L'équation s'écrit donc

$$5x + 6y + 14 = 0,$$

$$\boxed{5x + 6y + 14 = 0.}$$

3. Plan passant par un point et dirigé par deux vecteurs. Pour déterminer l'équation du plan passant par $A(1,2,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on commence par trouver un vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ tel que

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0.$$

(i) Pour $\overrightarrow{u}(4,2,-2)$ et $\overrightarrow{v}(0,4,2)$, le système est

$$\begin{cases} 4a + 2b - 2c = 0, \\ 4b + 2c = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation, $c = -2b$. Puis, la première donne

$$4a + 2b - 2(-2b) = 4a + 6b = 0 \quad \text{donc} \quad a = -\frac{3}{2}b.$$

En choisissant $b = 2$, on obtient $a = -3$ et $c = -4$, donc $\overrightarrow{n}(-3,2,-4)$. Calculons

$$d = -\Big[(-3)(1) + 2(2) + (-4)(-3)\Big] = -(-3+4+12) = -13.$$

L'équation du plan est alors

$$-3x + 2y - 4z - 13 = 0,$$

$$\boxed{-3x + 2y - 4z - 13 = 0.}$$

(ii) Pour $\overrightarrow{u}(4,1,-5)$ et $\overrightarrow{v}(2,-2,-5)$, on a le système

$$\begin{cases} 4a + b - 5c = 0, \\ 2a - 2b - 5c = 0. \end{cases}$$

Exprimons $b = 5c - 4a$, puis en substituant dans la deuxième équation,

$$2a - 2(5c - 4a) - 5c = 10a - 15c = 0 \quad \text{donc} \quad a = \frac{3}{2}c.$$

Alors, $b = 5c - 4\left(\frac{3}{2}c\right) = -c$. En choisissant $c = 2$, on trouve $\overrightarrow{n}(3, -2, 2)$. Le calcul de d donne :

$$d = -\left[3(1) + (-2)(2) + 2(-3)\right] = -(3 - 4 - 6) = 7.$$

L'équation du plan est donc

$$3x - 2y + 2z + 7 = 0,$$

$$\boxed{3x - 2y + 2z + 7 = 0.}$$

(iii) Pour $\overrightarrow{u}(2, 3, 1)$ et $\overrightarrow{v}(4, 8, 3)$, le système devient

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 0, \\ 4a + 8b + 3c = 0. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 2, on obtient

$$4a + 6b + 2c = 0.$$

La soustraction donne $2b + c = 0 \quad$ donc $\quad c = -2b$. Ensuite, la première équation devient

$$2a + 3b - 2b = 2a + b = 0 \quad \text{donc} \quad a = -\frac{b}{2}.$$

En choisissant $b = 2$, on a $a = -1$ et $c = -4$, donc $\overrightarrow{n}(-1, 2, -4)$. Calcul de d :

$$d = -\left[(-1)(1) + 2(2) + (-4)(-3)\right] = -(-1 + 4 + 12) = -15.$$

L'équation s'écrit ainsi

$$-x + 2y - 4z - 15 = 0.$$

En multipliant par -1 pour une écriture plus usuelle, on obtient

$$x - 2y + 4z + 15 = 0.$$

$$\boxed{x - 2y + 4z + 15 = 0.}$$

4. Plan passant par trois points. On cherche une équation du plan de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

passant par

$$A(1, 0, 1), \quad B(2, -1, 0), \quad C(3, -2, 0).$$

L'appartenance de ces points donne le système

$$\begin{cases} a + 0 + c + d = 0 \\ 2a + (-1)b + d = 0 \\ 3a - 2b + d = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c - d \\ 2(-c - d) - b + d = 0 \\ 3(-c - d) - 2b + d = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c - d \\ 2(-c - d) - b + d = 0 \\ 3(-c - d) - 2b + d = 0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -c - d \\ c = -(b + d)/2 \\ (b + d)/2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ c = 0 \\ b = -d \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ c = 0 \\ b = a \end{cases}$$

Ainsi, l'équation du plan s'écrit (avec $a \neq 0$) :

$$ax + ay - a = 0.$$

c'est-à-dire en divisant par $a \neq 0$

$$\boxed{x + y - 1 = 0.}$$

5. **Plan médiateur d'un segment.** Soit $A(2,1,-3)$ et $B(4,-1,-3)$. Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan qui passe par le milieu I de $[AB]$ et qui est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

   a. Calcul des coordonnées du milieu I Le milieu I est

$$I\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+(-1)}{2}, \frac{-3+(-3)}{2}\right) \text{ soit } I(3,0,-3).$$

   b. Vecteur directeur de AB.

$$\overrightarrow{AB}\,(4-2,\ -1-1,\ -3-(-3)) = (2,-2,0).$$

   Ce vecteur est normal au plan médiateur.

   c. Calcul de d.

$$d = -\Big[2\times 3 + (-2)\times 0 + 0\times(-3)\Big] = -6.$$

   L'équation du plan est donc

$$2x-2y+0\cdot z-6=0,$$

   ce qui s'écrit après simplification

$$x-y-3=0.$$

$$\boxed{x-y-3=0.}$$

Exercice 2 *Intersections de plans et de droites* ☆ ☆

Énoncé rappelé : *Les questions 1. et 2. sont indépendantes.*

1. **Intersection d'une droite et d'un plan.** La droite $\mathscr{D}$ est définie par le point

$$A(1,2,-1)$$

   et par le vecteur directeur

$$\overrightarrow{u}\,(1,-1,2).$$

   Son paramétrage est

$$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 2-t, \\ z = -1+2t, \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

   Pour déterminer l'intersection avec un plan $\mathscr{P}$, on remplace x, y, z par ces expressions dans l'équation du plan.

   a. Pour $\mathscr{P} : x+y+2z=8$, on a :

$$(1+t)+(2-t)+2(-1+2t) = 1+4t.$$

   En imposant $1+4t=8$, on obtient $t=\frac{7}{4}$. L'intersection est

$$\left(1+\frac{7}{4}, 2-\frac{7}{4}, -1+2\cdot\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right).$$

b. Pour $\mathscr{P} : 2x - z = 4$, on remplace :

$$2(1+t) - (-1+2t) = 3.$$

Comme $3 \neq 4$, il n'existe pas de solution donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan.

c. Pour $\mathscr{P} : 2x - z = 3$, on obtient :

$$2(1+t) - (-1+2t) = 3.$$

L'égalité est satisfaite pour tout t, ce qui signifie que la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan.

2. Intersection de deux plans. On montre que les deux plans sont sécants et on caractérise leur droite d'intersection par un point et un vecteur directeur.

(i) Pour $\mathscr{P}_1 : x = -1$ et $\mathscr{P}_2 : y = 3$, on a directement

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z \text{ libre.}$$

Une paramétrisation est :

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec vecteur directeur $(0, 0, 1)$ et point $(-1, 3, 0)$.

(ii) Pour $\mathscr{P}_1 : y + z = 1$ et $\mathscr{P}_2 : y = -1$, on déduit $y = -1$ puis

$$-1 + z = 1 \quad \text{donc} \quad z = 2,$$

et x est libre. Une paramétrisation est

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -1, \\ z = 2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(iii) Pour $\mathscr{P}_1 : x + y - 2z = 6$ et $\mathscr{P}_2 : y + z = 12$, on exprime z via

$$z = 12 - y,$$

puis dans $\mathscr{P}_1$:

$$x + y - 2(12 - y) = x + 3y - 24 = 6 \quad \text{donc} \quad x + 3y = 30.$$

En posant $y = t$, on a $x = 30 - 3t$ et $z = 12 - t$. La droite d'intersection est paramétrée par

$$(x, y, z) = (30 - 3t, t, 12 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iv) Pour $\mathscr{P}_1 : x + y - 2z = 6$ et $\mathscr{P}_2 : x - y + z = 12$, on additionne les deux équations :

$$(x + y - 2z) + (x - y + z) = 2x - z = 18 \quad \text{donc} \quad z = 2x - 18.$$

En remplaçant dans la deuxième équation,

$$x - y + (2x - 18) = 12 \quad \text{donc} \quad 3x - y = 30 \quad \text{donc} \quad y = 3x - 30.$$

En posant $x = t$, on obtient :

$$y = 3t - 30, \quad z = 2t - 18.$$

La droite d'intersection est alors donnée par

$$(x, y, z) = (t, 3t - 30, 2t - 18), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 *Équation d'une sphère* ☆

Énoncé rappelé : *Justifier qu'une équation de la sphère de centre* $\Omega(1\,;2\,;3)$ *et de rayon* 7 *est :*

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=35.$$

L'équation d'une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Pour $\Omega(1,2,3)$ et $R=7$, on a :

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=49.$$

En développant,

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14=49.$$

En soustrayant 14,

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=35.$$

Exercice 4 *Métropole mars 2023 J2* ☆ ☆ ☆

1. **a.** D'après l'équation de $\mathscr{P}_1$, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ en est un vecteur normal.

b. On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\times1-1\times1-1\times1=0$ donc $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$
Donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires

2. **a.** D'après $\overrightarrow{n_2}$, une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est de la forme $x-y+z+d=0$.
Or $B(1;1;2)\in\mathscr{P}_2 \iff 1-1+2+d=0 \iff d=-2$.
Donc une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est $x-y+z-2=0$

b. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants. On vérifie que Δ est incluse dans les 2 plans, pour $t\in\mathbb{R}$:
Pour $\mathscr{P}_1$: $2\times0-2+t-t+2=0$ et pour $\mathscr{P}_2$: $0-(-2+t)+t-2=0$.
Donc Δ est l'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3. **a.** Soit $t\in\mathbb{R}$, on a :
$AM_t=\sqrt{(0-1)^2+(-2+t-1)^2+(t-1))^2}=\sqrt{1+t^2-6t+9+t^2-2t+1}=\sqrt{2t^2-8t+11}$

b. Le projeté de A sur H réalise la distance minimale entre A et Δ.
$t\mapsto 2t^2-8t+11$ est un trinôme du second degré avec $2>0$ donc atteint son minimum en $t_0=\dfrac{8}{2\times2}=2$, or la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, le minimum de f est aussi atteint en $t_0=2$ et vaut $f(2)=\sqrt{2\times4-8\times2+11}=\sqrt{3}$ u.l.

4. **a.** La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale à $\mathscr{P}_1$ donc un de ses vecteurs directeurs est $\overrightarrow{n_1}$, et passe par A donc une représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ est $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$

b. H_1 est l'intersection de la droite $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{P}_1$.

Les coordonnées proposées de H_1 vérifient les équations de la droite $\mathscr{D}_1$ (avec $t=-\dfrac{2}{3}$) et de $\mathscr{P}_1$ car $-2\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}+\dfrac{6}{3}=0$.

5. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2H}$: $\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}-1\\ \dfrac{1}{3}-1\\ \dfrac{5}{3}-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}0-\dfrac{4}{3}\\ 0-\dfrac{2}{3}\\ 2-\dfrac{4}{3}\end{pmatrix}=\overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}=\overrightarrow{AH_1}$ donc AH_1HH_2 est un parallélogramme.

(AH) est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$, donc est orthogonale à toutes les droites incluses dans $\mathscr{P}_1$, comme par exemple (H_1H)

Le parallélogramme AH_1HH_2 est bien un rectangle.

Exercice 5 *Centre-Étrangers mars 2023 J1* ☆☆

1. Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

A(0 ; 0 ; 0)	B(4 ; 0 ; 0)	C(4 ; 4 ; 0)	D(0 ; 4 ; 0)
E(0 ; 0 ; 8)	F(4 ; 0 ; 4)	G(4 ; 4 ; 4)	H(0 ; 4 ; 8)

I étant le milieu de [EF], on a $\mathrm{I}\left(\dfrac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{F}}}{2}\,;\,\dfrac{y_{\mathrm{E}}+y_{\mathrm{F}}}{2}\,;\,\dfrac{z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}}}{2}\right)$, soit I(2 ; 0 ; 6).

J étant le milieu de [AE], on a de même : J(0 ; 0 ; 4).

2. a. Si le plan est nommé (IGJ), cela signifie que les trois points I, G et J définissent le plan, et donc sont non alignés.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{IG}}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{G}}-x_{\mathrm{I}}\\ y_{\mathrm{G}}-y_{\mathrm{I}}\\ z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}=-1\times2+1\times4+1\times(-2)=-2+4-2=0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$.
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=-1\times(-2)+1\times0+1\times(-2)=2+0-2=0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

b. Une équation cartésienne d'un plan dont $\vec{n}$ est un vecteur normal est de la forme : $-1\times x+1\times y+1\times z+d=0$, soit $-x+y+z+d=0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que la constante d dans ce cas doit être telle que :

$$\begin{aligned}-x_{\mathrm{G}}+y_{\mathrm{G}}+z_{\mathrm{G}}+d=0 &\iff -4+4+4+d=0\\ &\iff d=-4\end{aligned}$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x+y+z-4=0$.

3. Si d est perpendiculaire à (IGJ), alors elle est dirigée par $\overrightarrow{n}$, comme elle passe par H, elle admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_{\mathrm{H}} + t x_{\overrightarrow{n}} \\ y = y_{\mathrm{H}} + t y_{\overrightarrow{n}} \\ z = z_{\mathrm{H}} + t z_{\overrightarrow{n}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

4. Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d. Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$\begin{aligned} M_t \in (\mathrm{IGJ}) &\iff -x_{M_t} + y_{M_t} + z_{M_t} - 4 = 0 \\ &\iff -(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0 \\ &\iff 3t + 8 = 0 \\ &\iff t = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

L est donc $M_{\frac{-8}{3}}$ sur la droite d : il a donc comme coordonnées $\mathrm{L}\left(-\frac{-8}{3}\,;\,4 + \frac{-8}{3}\,;\,8 + \frac{-8}{3}\right)$.

Cela confirme $\mathrm{L}\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{12-8}{3}\,;\,\frac{24-8}{3}\right)$

Autrement dit, le point L est bien le point de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.

5. Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$\mathrm{HL} = \sqrt{(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{H}})^2 + (y_{\mathrm{L}} - y_{\mathrm{H}})^2 + (z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{H}})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Calculons : $\overrightarrow{\mathrm{IG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base (car le triangle étant rectangle, son aire est simple à calculer) et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) (distance qui a été calculée à la question **5.**).

$\mathrm{IG} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\mathrm{IJ} = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

L'aire du triangle IGJ est donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{IGJ}} = \frac{\mathrm{IG} \times \mathrm{IJ}}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32}{3}$.

Le volume du tétraèdre est de $V = \frac{32}{3}$ (soit environ 10,7, au dixième près).

Exercice 6 *Polynésie mars 2023 J1* ☆ ☆

1. **a.** L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle contient le point de coordonnées $(-3\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de k donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

   b. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

   c. Une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\left\{\begin{array}{l c l}x &= 2+t & \\ y &= & 3-t \\ z &= & t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

   S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels k et t tels que :
   $$\left\{\begin{array}{l c l c l}x &=& 2+t &=& 2k-3\\ y &=& 3-t &=& k\\ z &=& t &=& 5\end{array}\right.$$
   La dernière équation donne $t=5$, puis la deuxième $k=3-5=-2$ et en remplaçant dans la première $2+5=-4-3$: cette égalité est fausse, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

   d. Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

2. **a.** On a $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = -1-2+3=0$;
   de même $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} = -2+2+0=0$, donc le vecteur $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

   b. Un point commun au plan P et à la droite d_2 a ses coordonnées qui vérifient le système :
   $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 2k-3\\ y &=& k\\ z &=& 5\\ 5x+4y-z-22 &=& 0\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$, d'où en remplaçant x, y, z dans la dernière équation :
   $5(2k-3)+4(k)-5-22=0 \iff 10k-15+4k-27=0 \iff 14k=42 \iff 7k=21 \iff k=3$.
   Le point commun au plan P et à la droite d_2 a pour coordonnées (6 - 3 ; 3 ; 5) soit M(3 ; 3 ; 5).

3. **a.** Δ et d_1 ont leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.
   Ces deux droites sont sécantes s'il existent des réels t et r tels que
   $\left\{\begin{array}{l c l c l}x &=& 2+t &=& -r+3\\ y &=& 3-t &=& 2r+3\\ z &=& t &=& 3r+5\end{array}\right., t, r\in\mathbb{R}$.
   La dernière équation $t=3r+5$ donne en remplaçant dans la deuxième :
   $3-3r-5=2r+3 \iff -5=5r \iff r=-1$, d'où $t=5-3=2$ et en remplaçant dans la première équation on obtient $2+2=1+3$, égalité vraie.
   Δ et d_1 sont sécantes au point L(4 ; 1 ; 2)

   b. Conclusion : on a trouvé une droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites d_1 et d_2.