# Corrigé des exercices de combinatoire

*Pour gagner du temps, corrigé généré avec ChatGPT 4 qui a commis plusieurs erreurs, que j'ai corrigées à la relecture. Quelques réponses générées avec ChatGPT o3-mini-high qui est plus performant en raisonnement.*

## Exercice 1 : Principe additif

**Correction :**

1. En utilisant la formule :

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B),$$

   on obtient :

$$\mathrm{card}(A \cup B) = 5 + 11 - 3 = 13.$$

2. Sachant que $\mathrm{card}(B) = 2 \times \mathrm{card}(A)$ et $\mathrm{card}(A \cap B) = 3$, et que $\mathrm{card}(A \cup B) = 9$, posons $\mathrm{card}(A) = x$. Alors $\mathrm{card}(B) = 2x$ et :

$$x + 2x - 3 = 9 \implies 3x - 3 = 9 \implies 3x = 12 \implies x = 4.$$

   Donc $\mathrm{card}(B) = 2 \times 4 = 8$.

## Exercice 2 : Principe multiplicatif

**Correction :**

1. Nombre d'aérodromes :
   - (a) $26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4$.
   - (b) En Europe : $1 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^3$.
   - (c) En France : $1 \times 1 \times 26 \times 26 = 26^2$.
2. Choix des responsables :
   - (a) Aucun cumul : $8 \times 7 \times 6 = 336$.
   - (b) Cumul possible : $8 \times 8 \times 8 = 512$.
   - (c) Deux fonctions cumulées :

### Attribution des fonctions aux amis

Nous devons attribuer trois fonctions (vaisselle, rangement, ménage) aux huit amis, en respectant la contrainte suivante : un même membre ne peut cumuler que deux fonctions (il ne peut pas cumuler les trois).
Nous allons aborder ce problème de deux manières différentes.

## Méthode 1 : Par cas distincts

Nous distinguons deux cas :

### Cas 1 : Trois personnes distinctes

Ici, chaque fonction est confiée à une personne différente.

— **Responsable de la vaisselle :** 8 choix.

— **Responsable du rangement :** 7 choix (car différent de celui choisi pour la vaisselle).

— **Responsable du ménage :** 6 choix (différent des deux précédents).

Le nombre de façons dans ce cas est :

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

### Cas 2 : Une personne cumule deux fonctions et une autre cumule la troisième

Ici, une personne assurera deux fonctions et une autre personne assurera la fonction restante.

(a) **Choix des deux fonctions à cumuler :** Il y a $\binom{3}{2} = 3$ manières de choisir les deux fonctions que la même personne effectuera.

(b) **Choix de la personne qui cumule ces deux fonctions :** 8 possibilités (n'importe lequel des amis).

(c) **Choix de la personne pour la fonction restante :** 7 possibilités (car il faut choisir une personne différente de celle qui cumule déjà deux fonctions).

Le nombre de façons dans ce cas est :

$$3 \times 8 \times 7 = 168.$$

### Total

En additionnant les deux cas, on obtient :

$$336 + 168 = 504.$$

### Méthode 2 : Par complément

Sans contrainte, chaque fonction peut être attribuée à n'importe lequel des 8 amis, donc il y a :

$$8^3 = 512 \quad \text{attributions possibles.}$$

Cependant, on doit exclure les cas où une même personne cumule les trois fonctions. Le nombre de cas à exclure est :

— 8 (une pour chaque ami pouvant cumuler les trois fonctions).

Ainsi, le nombre total d'attributions valides est :

$$512 - 8 = 504.$$

### Conclusion

Le nombre de façons de choisir les responsables en respectant la contrainte est **504**.

3. Anagrammes de CUBES :
   - (a) En tout : $5! = 120$.
   - (b) Commence par voyelle : $2 \times 3! = 12$.
   - (c) Se termine par un U : $4! = 24$.
   - (d) Alternance voyelle/consonne : $2 \times 3! = 12$.
4. Codes de cadenas :
   - (a) En tout : $10^4 = 10000$.
   - (b) Chiffres différents : $A_{10}^4 = 5040$.
   - (c) Chiffres impairs : $5^4 = 625$.
   - (d) Se termine par 7 : $10^3 = 1000$.
   - (e) Distincts et décroissants : $\binom{10}{4} = 210$.

# Exercice 3 : Factorielles

**Correction :**

1. Simplifications :
   - (a) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)$.
   - (b) $\frac{(2n+3)!}{(2n)!} = (2n+3) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)$.
   - (c) $\frac{(n^2-1) \cdot n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)(n+1)n!}{(n+1)n!} = n - 1$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$u_n = \frac{n!}{n^n}.$$
   (a) **Simplification de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ :**
   On a
$$u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{n!}{n^n}.$$
   Ainsi,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}.$$
   Or, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,n!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}}.$$
   Comme $(n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1)$, on peut simplifier :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
   (b) **Sens de variation de la suite $u$ :**
   Pour $n \geq 1$, on remarque que
$$\frac{n}{n+1} < 1.$$
   Ainsi,
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Autrement dit,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$
ce qui implique que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

3. Soit $n$ un entier naturel non nul. Exprimer en fonction d'une puissance de 2 et d'une factorielle, le produit
$$P = \prod_{k=1}^{n} 2k = 2 \times 4 \times \ldots \times (2n-2) \times 2n.$$
Pour chaque $k$, on peut écrire $2k = 2 \times k$. Ainsi,
$$P = \prod_{k=1}^{n} (2 \times k) = \left( \prod_{k=1}^{n} 2 \right) \times \left( \prod_{k=1}^{n} k \right) = 2^n \times n!.$$
La forme recherchée est donc :
$$\boxed{P = 2^n \, n!}.$$

# Exercice 4 : Coefficients binomiaux

**Correction :**

1. Groupes d'élèves :
   - (a) $\binom{31}{5}$.
   - (b) $\binom{31}{5} - \binom{21}{5}$.
   - (c) $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$.
2. Simplifications de binomiaux :
   - (a) $\binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$.
   - (b) $\binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-2} = \binom{n+1}{n-2}$ d'après la règle du triangle de Pascal qui est aussi égal à $\binom{n+1}{3}$.
   - (c) $\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1} = n + 1 - n = 1$.
   - (d) $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1}$.

# Exercice 5 : Poker et combinaisons

**Correction :**

1. Cinq cartes quelconques : $\binom{52}{5}$.
2. Cinq cartes de la même couleur : $4 \times \binom{13}{5}$.
3. Exactement un trêfle : $\binom{13}{1} \times \binom{39}{4}$.
4. Au moins un roi : $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.
5. Deux trêfles, un carreau, deux cœurs : $\binom{13}{2} \times \binom{13}{1} \times \binom{13}{2}$.
6. Trois rois et deux as : $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$.
7. Un full : $\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{1} \times \binom{4}{2}$.