Correction des exercices de combinatoire de la fiche 2

Pour gagner du temps, corrigé généré avec ChatGPT o3-mini-high qui n'a commis aucune erreur de raisonnement mais que j'ai repris pour exiger une rédaction différente par disjonction des cas pour le nombre dominos distincts et le nombre dominos avec deux faces paires.

Exercice 1

On considère deux parties A et B d'un ensemble E tels que

$$\mathrm{Card}(E) = 70, \quad \mathrm{Card}(A) = 27, \quad \mathrm{Card}(B) = 30.$$

Dans chacun des cas, il faut déterminer le nombre d'éléments n'appartenant pas à $A \cup B$.

a) **Si** $A \cap B = \emptyset$ **:**
Lorsque A et B sont disjoints, on a

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = 27 + 30 = 57.$$

Ainsi, le nombre d'éléments n'appartenant pas à $A \cup B$ est

$$70 - 57 = 13.$$

b) **Si** $A \subset B$ **:**
Dans ce cas, $A \cup B = B$ et donc

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(B) = 30.$$

Le nombre d'éléments hors de $A \cup B$ est alors

$$70 - 30 = 40.$$

c) **Si Card**$(A \cap B) = 20$ **:**
On utilise la formule d'inclusion-exclusion :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) = 27 + 30 - 20 = 37.$$

Ainsi, le nombre d'éléments qui n'appartiennent pas à $A \cup B$ est

$$70 - 37 = 33.$$

Exercice 2

Dans un centre accueillant 120 personnes, on sait que :

$$\mathrm{Card}(F) = 24 \quad \text{(personnes pratiquant le football)}, \quad \mathrm{Card}(H) = 15 \quad \text{(personnes pratiquant le handball)},$$

et

$$\mathrm{Card}(F \cap H) = 6 \quad \text{(personnes pratiquant les deux sports)}.$$

1. **Nombre de personnes pratiquant au moins l'un des deux sports :**
   Par la formule de l'union,
   $$\mathrm{Card}(F \cup H) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(H) - \mathrm{Card}(F \cap H) = 24 + 15 - 6 = 33.$$
2. **Nombre de personnes ne pratiquant aucun des deux sports :**
   Ce nombre est égal au complémentaire de $F \cup H$ dans l'ensemble total de 120 personnes :
   $$120 - 33 = 87.$$
3. **Nombre de personnes pratiquant un seul des deux sports :**
   Le nombre de personnes pratiquant uniquement le football est $24 - 6 = 18$ et celles pratiquant uniquement le handball sont $15 - 6 = 9$. Donc,
   $$18 + 9 = 27.$$

Exercice 3

1. **Codes d'un cadenas :**
   Un cadenas comporte trois chiffres (de 0 à 9), avec répétition possible. Pour chaque chiffre, il y a 10 possibilités. Le nombre total de codes est donc :
   $$10^3 = 1000.$$
2. **Plaque d'immatriculation :**
   La plaque d'immatriculation d'un véhicule comporte :
   - Deux lettres distinctes, choisies parmi les lettres de l'alphabet à l'exception de O, I et U (soit 23 lettres possibles) ;
   - Trois chiffres (compris entre 0 et 9) ;
   - Encore deux lettres distinctes, choisies parmi les mêmes 23 lettres.

   Comme l'ordre des lettres compte, le nombre de façons de choisir les deux premières lettres est :
   $$23 \times 22.$$
   Pour les trois chiffres, il y a 10^3 possibilités, et pour les deux dernières lettres, encore 23×22 possibilités. Le nombre total de plaques est donc :
   $$(23 \times 22)^2 \times 10^3.$$

Exercice 4

Un domino est constitué de deux cases. Chaque case contient un nombre de points entre 0 et 6.

1. a) **Les dominos ci-dessus sont-ils tous différents ?**
   On remarque que, par exemple, le domino 52 et le domino 25 représentent la même pièce (l'ordre des cases n'ayant pas d'importance). Les dominos présentés ne sont donc pas tous différents.

   b) **Nombre total de dominos différents :**
   Pour compter le nombre de dominos (c'est-à-dire le nombre de couples non ordonnés avec répétition) issus de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, nous procédons par disjonction des cas :

   — **Cas 1 :** Les dominos doubles (les deux cases identiques). Il y a 7 possibilités : $(0, 0), (1, 1), \ldots, (6, 6)$.

   — **Cas 2 :** Les dominos avec deux nombres distincts. Leur nombre est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments distincts parmi 7, soit
   $$\binom{7}{2} = 21.$$

   Ainsi, le nombre total de dominos est
   $$7 + 21 = 28.$$

2. On choisit au hasard un domino parmi les 28 possibles.

   a) **Probabilité d'obtenir un domino constitué de deux nombres pairs :**
   Les nombres pairs entre 0 et 6 sont contenus dans l'ensemble $\{0, 2, 4, 6\}$. Pour compter le nombre de dominos dont les deux cases présentent un nombre pair, nous procédons de même par disjonction des cas :

   — **Cas 1 :** Les doubles parmi les pairs. Il y a 4 possibilités : $(0, 0), (2, 2), (4, 4), (6, 6)$.

   — **Cas 2 :** Les couples de nombres pairs distincts. Leur nombre est le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4, soit
   $$\binom{4}{2} = 6.$$

   Ainsi, le nombre total de dominos à deux nombres pairs est
   $$4 + 6 = 10.$$

   La probabilité d'obtenir un tel domino est donc
   $$\frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

b) **Probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux nombres est paire :**
La somme de deux nombres est paire si les deux nombres sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

— **Dominos à deux nombres pairs :** Nous venons de calculer qu'il y en a 10.

— **Dominos à deux nombres impairs :**
Les nombres impairs entre 0 et 6 forment l'ensemble $\{1, 3, 5\}$. Pour compter les dominos à deux nombres impairs, nous procédons par disjonction :

— Les doubles impairs : $(1, 1), (3, 3), (5, 5)$ (3 possibilités).

— Les couples de nombres impairs distincts : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités.

Le total pour ce cas est $3 + 3 = 6$.

Le nombre total de dominos dont la somme est paire est alors

$$10 + 6 = 16,$$

et la probabilité correspondante est

$$\frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

Exercice 5

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.

1. **Constitution d'un bureau dirigeant :**
On choisit trois personnes dans un groupe de 12, et chacune des trois personnes occupe une fonction spécifique (l'ordre compte). Le nombre de façons est donc

$$12 \times 11 \times 10.$$

La bonne réponse est la **Réponse 4**.

2. **Tirage de boules dans un sac :**
Le sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, soit un total de 8 boules. Comme le tirage se fait avec remise, la probabilité d'obtenir une boule noire lors d'un tirage est

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Pour trois tirages successifs, la probabilité d'obtenir trois boules noires est

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

La bonne réponse est la **Réponse 3**.

3. **Mains de cartes dans un jeu de 32 cartes :**
On souhaite compter le nombre de mains de 5 cartes contenant le valet et la dame de trèfle. Ces deux cartes étant imposées, il reste à choisir 3 cartes parmi les 30 restantes. Le nombre de mains est donc
$$\binom{30}{3}.$$
La bonne réponse est la **Réponse 2**.
4. **Formation de groupes de snowboardeurs :**
Un groupe de 6 snowboardeurs (3 adultes et 3 enfants) doit être réparti en deux groupes, l'un de 4 personnes (le télésiège à 4 places) et l'autre de 2 personnes. Le nombre de façons de choisir le groupe de 4 personnes est
$$\binom{6}{4} \quad \text{(ce qui est égal à } \binom{6}{2} = 15\text{)}.$$
La bonne réponse est la **Réponse 2**.
5. **Les enfants veulent rester ensemble :**
Dans la situation précédente, si les 3 enfants doivent rester dans le même groupe, seul le groupe de 4 peut les accueillir (le groupe de 2 ne pouvant contenir 3 personnes). Pour constituer ce groupe, on place obligatoirement les 3 enfants et il faut choisir 1 adulte parmi les 3 disponibles, ce qui donne
$$\binom{3}{1} = 3.$$
La bonne réponse est la **Réponse 3**.
6. **Tirage de jetons dans un sac :**
Le sac contient 5 jetons blancs et 3 jetons noirs, soit 8 jetons en tout. On tire 3 jetons simultanément. Le nombre total de tirages possibles est $\binom{8}{3}$.
Le nombre de tirages donnant 3 jetons de même couleur est la somme des tirages pour :
   — 3 jetons blancs : $\binom{5}{3}$,
   — 3 jetons noirs : $\binom{3}{3} = 1$.

   La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}.$$
La bonne réponse est la **Réponse 2**.
7. **Rangement de quatre livres sur deux étagères :**
Chaque livre peut être placé sur l'une ou l'autre des deux étagères, ce qui donne pour 4 livres :
$$2^4.$$
La bonne réponse est la **Réponse 1**.