Corrigé des exemples du cours

Terminale S

Frédéric Junier [1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Plan

Q1

- Par règle de croissance comparée on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- Par règle de croissance comparée on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
- Par produit on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

Q2 1/2

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$ par règle de croissances comparées donc par quotient on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$$

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x \ln x = 0^-$ donc par quotient on a :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$$

Q2 2/2

- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x\ln x = 0^+$ donc par quotient on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x\ln x} = +\infty$$

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ donc par quotient on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0^+$$

Q3 a

- Pour tout $x > 0$ on a $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x})$.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par règle de croissances comparées donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$ par somme.
- Par produit on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$.

Q3 a

- Pour tout $x > 0$ on a $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x})$.
- On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par règle de croissances comparées donc $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$ par somme.
- Par produit on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} x(1 - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$.

Q3 b

- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x + \ln x = -\infty$

Q3 c

- Pour tout $x > 0$ on a $\dfrac{1}{x} + \ln x = \dfrac{1 + x\ln x}{x}$.
- On a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ par règle de croissances comparées donc par somme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 + x\ln x = 1$.
- Par quotient on en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1 + x\ln x}{x} = +\infty$.

Q3 d

- Pour tout $x > 0$ on a $x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.
- On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ car $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
- Par composition on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Q3 e

- Pour tout $x > 0$ on a
$$\frac{\ln x}{x^2+3} = \frac{x}{x^2+3} \times \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x+\frac{3}{x}} \times \frac{\ln x}{x}.$$
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+\frac{3}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par règle de croissances comparées.
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+\frac{3}{x}} \times \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Q3 f

- Pour tout $x > 0$ on a $\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x} = 0,5\dfrac{\ln x}{x}$.
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par règle de croissances comparées.
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,5\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Q3 g

- Pour tout $x > 0$ on a $(x^3 + 2x)\ln x = x \ln x \times (x^2 + 2)$.
- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ par règle de croissances comparées.
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x \times (x^2 + 2) = 0$.

Q3 h

- Pour tout $x > 0$ on a $\sqrt{x}\ln x = \sqrt{x} \times 2\ln\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$.
- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$ par règle de croissances comparées.
- On en déduit par composition puis produit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} = 0$.

Q3 i

- Pour tout $x > 0$ on a $\dfrac{e^x}{x+2} = \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}$.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par règle de croissances comparées.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$.
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}} = +\infty$.

Q3 j

- Pour tout $x > 0$ on a
$\ln(ex) - \ln\left(e^{3x}\right) = \ln(e) + \ln(x) - 3x = 1 + x \times (\frac{\ln x}{x} - 3)$.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par règle de croissances comparées.
- On en déduit par somme que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - 3 = -3$.
- On conclut par produit puis somme que
$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x \times (\frac{\ln x}{x} - 3) = -\infty$.

Q3 k

- Pour tout $x > 0$ on a $(x+5)e^x = xe^x + 5e^x$.
- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ par règle de croissances comparées.
- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 5e^x = 0$
- On en déduit par somme que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x + 5e^x = 0$.

Q3 I

- Pour tout $x > 0$ on a $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{x}{e^x - 1}$.
- On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ car $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$
- On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ car $\exp'(0) = \exp(0) = 1$
- On en déduit par quotient que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.

Q3 m

- Pour tout $x > 0$ on a $(\ln x)^2 - \ln x = \ln x \times (\ln(x) - 1)$.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x \times (\ln(x) - 1) = +\infty$.

Q3 n

- Pour tout $x > 0$ on a $\ln x - e^x = \ln x \times (1 - \frac{e^x}{\ln x})$.
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$ par règle de croissances comparées
  donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{e^x}{\ln x} = -\infty$
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x \times (1 - \frac{e^x}{\ln x}) = -\infty$.

Q3 o

- Pour tout $x > 0$ on a $\dfrac{\ln x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1}$.
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par règle de croissances comparées.
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1} = 1$ par quotient.
- On en déduit par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1} = 0$.

Plan

Exemple 12 (1/2)

En chimie, le caractère acido-basique d'une solution se mesure avec un indicateur noté **pH** : $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$.
$[\text{H}_3\text{O}^+]$ est la concentration des ions hydronium exprimée en mol.L^{-1}.

- Le pH d'une solution telle que la concentration en ions H_3O^+ soit de $10^{-6{,}5}$ mol.L^{-1} est de $-\log(10^{-6{,}5}) = -6,5$.
- Dans une solution de $\text{pH} = 4$ la concentration en ions H_3O^+ est de $10^{-\text{pH}} = 10^{-4}\text{mol.L}^{-1}$.

Exemple 12 (2/2)

- La concentration en ions H_3O^+ d'une solution est multipliée par 10 000. Notons A le pH précédent et B le nouveau pH, on a :

$$B = -\log(10^4 \times 10^{-A})$$
$$B = -\log(10^4) - \log(10^{-A})$$
$$B = A - 4$$

Le pH diminue de 4 si la concentration est multipliée par 10^4.