Cours-D?rivation-Dichotomie-Exemple11

November 6, 2019

0.1 Import des bibliothèques Python

```
In [3]: import numpy as np                  #pour disposer des tableaux de type array
        import matplotlib.pyplot as plt     #pour les graphiques
```

```
In [2]: %matplotlib inline
        #pour l'affichage des graphiques dans la page et non pas dans une fenetre pop up
```

```
In [4]: import operator                     #pour utiliser les opérateurs de base sous forme de
```

```
In [5]: from sympy import *                 #pour le calcul formel
        init_printing()
        t = symbols('t')
```

```
In [6]: def dérivée(exp, t):
            return diff(exp,t)

        def simplifier(exp):
            return simplify(exp)

        def factoriser(exp):
            return factor(exp)
```

0.2 Résolution approchée de $f(x) = 0$ par balayage, exemple 11 du cours

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ definie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

0.2.1 Question 1 : Calcul de dérivée

```
In [7]: #expression de f(x)
        fexp = t**3 - 6*t**2 + 6
        fexp
```

Out[7]:
$t^3 - 6t^2 + 6$

```
In [8]: #expression de f'(x)
        fprimexp = dérivée(fexp, t)
        fprimexp
```

Out[8]:
$3t^2 - 12t$

```
In [9]: simplifier(fprimexp)
```

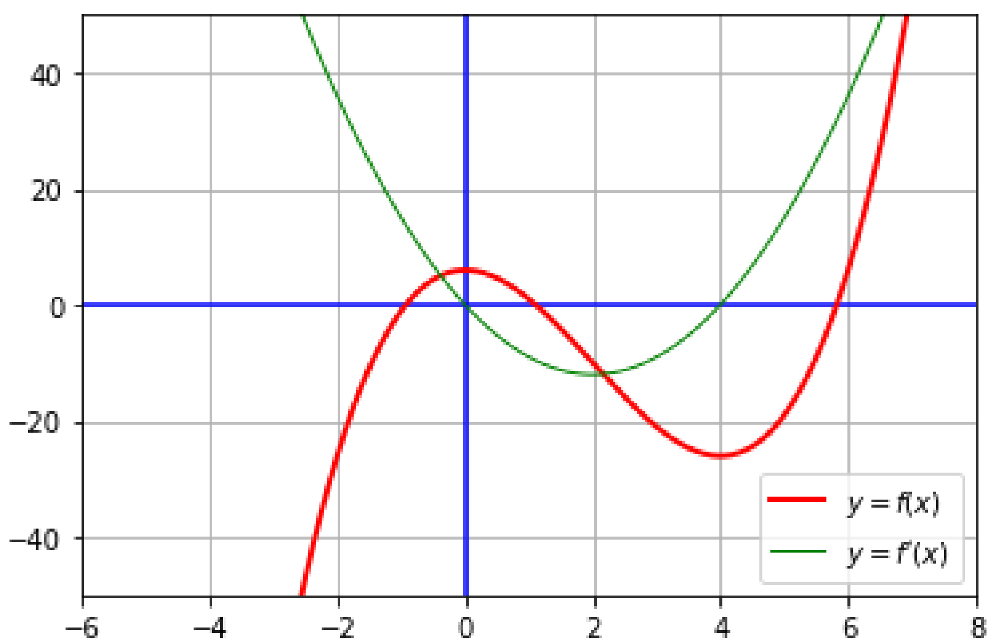
Out[9]:
$3t\,(t-4)$

0.2.2 Questions 2 et 3 Etude des variations de f

```
In [11]: f = lambdify(t, fexp,"numpy")
         fprim = lambdify(t, fprimexp,"numpy")
```

```
In [16]: #tracé des  courbes  de f et f'
         #Message d'erreur pour f' pour le point d'abscisse 0 (division par 0)
         xmin, xmax, ymin, ymax = -6, 8, -50 , 50
         plt.axis([xmin, xmax, ymin, ymax])
         tx = np.linspace(xmin, xmax, 1001)
         ty = f(tx)
         tz = fprim(tx)
         plt.axhline(color='blue')
         plt.axvline(color='blue')
         plt.grid(True)
         plt.plot(tx, ty, linestyle='-', linewidth=2, color='red', label=r'$y=f(x)$')
         plt.plot(tx, tz, linestyle='-', linewidth=1, color='green', label=r"$y=f'(x)$")
         plt.legend(loc='lower right')
```

```
Out[16]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f1a30247f60>
```



0.2.3 Question 4 Existence de solutions de l'équation $f(x) = 0$

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $]-\infty; 0]$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) > 0$
- f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty; 0]$.

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $[0; 4]$
- $f(0) > 0$ et $f(4) < 0$
- f est strictement croissante sur $[0; 4]$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans l'intervalle $[0; 4]$

- $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ est dérivable donc continue sur $[4; +\infty[$
- $f(4) < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- f est strictement croissante sur $[4; +\infty[$

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans l'intervalle $[4; +\infty[$.

0.3 Résolution approchée par balayage

```
In [17]: def balayage(g, a, b, pas, k):
             """Retourne un intervalle d'amplitude pas encadrant l'unique solution de g(x)= k
             dans l'intervalle [a,b]"""
             if g(a) < k:
                 comparaison = lambda u, v : operator.lt(u,v)
             else:
                 comparaison = lambda u, v : operator.gt(u,v)
             x = a
             #en-tete du tableau
             print('|{etape:^16}|{t:^12}|{ft:^12}|'.format(etape='Etape', t='t', ft='g(t)'))
             count = 1
             while comparaison(g(x), k):
                 print('|{etape:^16}|{t:^12.6f}|{ft:^12.6f}|'.format(etape=count,t=x, ft=g(x)))
                 x += pas
                 count += 1
             print('|{etape:^16}|{t:^12.6f}|{ft:^12.6f}|'.format(etape=count,t=x, ft=g(x)))
             return x - pas, x
```

```
In [19]: balayage(f, 5, 6, 0.1, 0)
```

```
|     Etape      |     t      |    g(t)    |
|       1        |  5.000000  | -19.000000 |
|       2        |  5.100000  | -17.409000 |
|       3        |  5.200000  | -15.632000 |
```

```
|       4        |  5.300000  | -13.663000 |
|       5        |  5.400000  | -11.496000 |
|       6        |  5.500000  | -9.125000  |
|       7        |  5.600000  | -6.544000  |
|       8        |  5.700000  | -3.747000  |
|       9        |  5.800000  | -0.728000  |
|       10       |  5.900000  |  2.519000  |
```

Out[19]:

(5.799999999999997, 5.899999999999997)

```
In [20]: balayage(f, 5.8, 5.9, 0.01, 0)
```

```
|     Etape      |     t      |    g(t)    |
|       1        |  5.800000  | -0.728000  |
|       2        |  5.810000  | -0.413659  |
|       3        |  5.820000  | -0.097032  |
|       4        |  5.830000  |  0.221887  |
```

Out[20]:

(5.819999999999999, 5.829999999999999)

```
In [21]: balayage(f, 5.82, 5.83, 0.001, 0)
```

```
|     Etape      |     t      |    g(t)    |
|       1        |  5.820000  | -0.097032  |
|       2        |  5.821000  | -0.065243  |
|       3        |  5.822000  | -0.033432  |
|       4        |  5.823000  | -0.001597  |
|       5        |  5.824000  |  0.030260  |
```

Out[21]:

(5.823000000000001, 5.824000000000002)