La qualité de la rédaction et le soin de la présentation seront pris en compte dans l'évaluation.
Toutes les réponses doivent être justifiées, tous les calculs doivent être détaillés.
Le sujet comporte quatre exercices répartis sur deux pages, il doit être rendu avec la copie.

Exercice 1 *sur . . . . . . points*

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $z = a + \mathrm{i}b$.
On note $\overline{z}$ le conjugué de z.

1. On considère le nombre complexe $z + z\overline{z}$, démontrer que sa partie réelle est $a + a^2 + b^2$ et que sa partie imaginaire est b.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z + z\overline{z} = 1 + \mathrm{i}$.

Exercice 2 *sur . . . . . . points*

Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}\,(z)$ sa partie réelle et $\mathrm{Im}\,(z)$ sa partie imaginaire.
On considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n \geqslant 0,\ z_{n+1} = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right) z_n \end{cases}$$

On admet que :

- ☞ pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $z_n = z_1^n$;
- ☞ $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, est solution de l'équation (E) c'est-à-dire que $z_1^2 = 2z_1\sqrt{3} - 4$ et donc que :

$$z_1^3 = 2z_1^2\sqrt{3} - 4z_1 = 8z_1 - 8\sqrt{3} = -8\mathrm{i}$$

2. Déterminer les formes algébriques de $(z_1)^6$ puis de $(z_1)^{2019}$.

3. Avec un logiciel de calcul formel, on a déterminé ci-dessous la forme algébrique du produit d'un nombre complexe d'écriture algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ par le nombre complexe z_1.

```
In [6]:  z = x + I * y

In [7]:  z
Out[7]:  x + iy

In [8]:  z1 = sqrt(3) - I

In [9]:  z1
Out[9]:  √3 - i

In [10]: forme_algebrique(z * z1)
Out[10]: √3x + y + i(-x + √3y)
```

En déduire que : $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{\operatorname{Im}(z \times z_1) + \operatorname{Re}(z)}{\sqrt{3}}$.

4. L'algorithme ci-après doit afficher en sortie le nombre de termes de la suite (z_n), dont l'indice est inférieur ou égal à 50 et qui sont des imaginaires purs.

a. Proposer une modification pour corriger l'instruction en ligne 11 qui est incorrecte.

b. Compléter ci-dessous les lignes 10 et 12 de l'algorithme.

```
 1: DEBUT_ALGORITHME
 2:   //Commentaire : C contient le compteur d'imaginaires purs
 3:   C ⟵ 0
 4:   //Commentaire : X contient la partie réelle de z_n
 5:   X ⟵ 1
 6:   //Commentaire :Y contient la partie imaginaire de z_n
 7:   Y ⟵ 0
 8:   POUR N ALLANT_DE 1 A 50
 9:     DEBUT_POUR
10:     Y ⟵ ..................
11:     X ⟵ √3 × X + Y
12:     SI .................. ALORS
13:       DEBUT_SI
14:       C PREND_LA_VALEUR C + 1
15:       FIN_SI
16:     FIN_POUR
17:   AFFICHER C
18: FIN_ALGORITHME
```

Exercice 3 *sur ...... points*

Soit θ un réel, on considère le nombre complexe :

$$z = \frac{5(\cos(\theta) + \mathrm{i})}{1 - 2\mathrm{i}}$$

1. Démontrer que l'écriture algébrique du nombre complexe z est :

$$z = (\cos(\theta) - 2) + \mathrm{i}(1 + 2\cos(\theta))$$

2. Existe-t-il des valeurs de θ pour lesquelles z est un réel pur ? Si oui, déterminer l'ensemble de ces valeurs.

Exercice 4 *sur ...... points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par règles opératoires.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que pour tout réel x, on a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

a. Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

b. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{5\pi}{4}\,;-\dfrac{\pi}{4}\right[$.