732 Corrigé du DS n°8 1/

Exercice 1 | Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $z = a + ib$.

1) On a $\overline{z} = a - ib$

On en déduit que $z\overline{z} + z = a^2+b^2+a+ib$

La partie réelle de $z\overline{z}+z$ est donc a^2+b^2+a

et sa partie imaginaire est b.

2) On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z + z\overline{z} = 1+i \iff a^2+b^2+a+ib = 1+i$

On identifie parties réelle et imaginaire

$z+z\overline{z} = 1+i \iff \begin{cases} a^2+b^2+a=1 \\ b=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a^2+a=0 \\ b=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a(a+1)=0 \\ b=1 \end{cases}$

$z+z\overline{z} = 1+i \iff \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

On en déduit que l'équation $z+z\overline{z}=1+i$ a deux solutions $z=i$ et $z=-1+i$

Exercice 2 | On considère l'équation :

(E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

1) On a $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4\times 4$

$\Delta = 4\times 3 - 16 = -4$

$\Delta < 0$ donc l'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées

$\boxed{z_1 = \frac{2\sqrt{3}+i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3}+i}$

et $\boxed{z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}-i}$

2) a) On a $z_1^3 = 2z_1^2\sqrt{3} - 4z_1$

or $z_1^2 = 2z_1\sqrt{3} - 4$

donc $z_1^3 = 2(2z_1\sqrt{3}-4)\sqrt{3} - 4z_1$

$z_1^3 = 12z_1 - 8\sqrt{3} - 4z_1$

$z_1^3 = 8z_1 - 8\sqrt{3}$

or $z_1 = \sqrt{3} - i$

donc $z_1^3 = 8(\sqrt{3}-i) - 8\sqrt{3} = -8i$

b) On a :

$z_1^6 = z_1^6 = (z_1^3)^2 = (-8i)^2 = -64$

et $2019 = 6\times 336 + 3$

donc $z_1^{2019} = (z_1^6)^{336} \times z_1^3$

donc $z_1^{2019} = (-64)^{336} \times (-8i)$

$\boxed{z_1^{2019} = 64^{336}\times(-8)\times i}$

3) Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$

D'après le logiciel de calcul formel,

on a : $\mathrm{Im}(z\times z_1) = -\mathrm{Re}(z) + \sqrt{3}\times\mathrm{Im}(z)$

donc $\boxed{\mathrm{Im}(z) = \frac{\mathrm{Im}(z\times z_1) + \mathrm{Re}(z)}{\sqrt{3}}}$

4) a)

En ligne 11, on peut écrire :

$X \leftarrow \sqrt{3}\times X + \frac{Y+X}{\sqrt{3}}$

b) En ligne 14, on écrit :

$Y \leftarrow Y\times\sqrt{3} - X$

En ligne 12, on écrit

Si $X = 0$ alors

Exercice 3 | Soit θ un réel, on considère le nombre complexe :

$z = \frac{5(\cos(\theta)+i)}{1-2i}$

732 Corrigé du DS n°8

1) L'écriture algébrique du nombre complexe z est :

$$z = \frac{5(\cos(\theta)+i)}{1-2i} = \frac{5(\cos(\theta)+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$z = \frac{5\times(\cos(\theta)+2i\cos\theta+i-2)}{1+2^2}$$

$$z = (\cos(\theta)-2) + i\,(2\cos\theta+1)$$

2) z est un réel pur ssi sa partie imaginaire est nulle.

z est un réel pur ssi $1+2\cos(\theta)=0$

z est un réel pur ssi $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$

z est un réel pur ssi $\cos(\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

z est un réel pur ssi $\begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \text{ou} \\ \theta = -\frac{2\pi}{3} + k'2\pi \end{cases}$

avec k et k' des entiers relatifs

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\times\cos(x)$

1) Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

donc $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\times\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}$

Or $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ par composition

donc $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x} = 0$

D'après le théorème de limite par encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}\times e^{-x}\times\cos(x) = 0}$$

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opération et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\times(-\sin(x))$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\times(\cos(x)+\sin(x))$$

$$f'(x) = -e^{-x}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right)$$

Or $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

donc $\boxed{f'(x) = -e^{-x}\times\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

b) Pour tout $x \in \left]-\frac{5\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\right[$ on a

$-\pi \leq x+\frac{\pi}{4} < 0$

donc $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < 0$

De plus $-e^{-x} < 0$

donc $-e^{-x}\times\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

donc $f'(x) > 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $\left]-\frac{5\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\right[$.