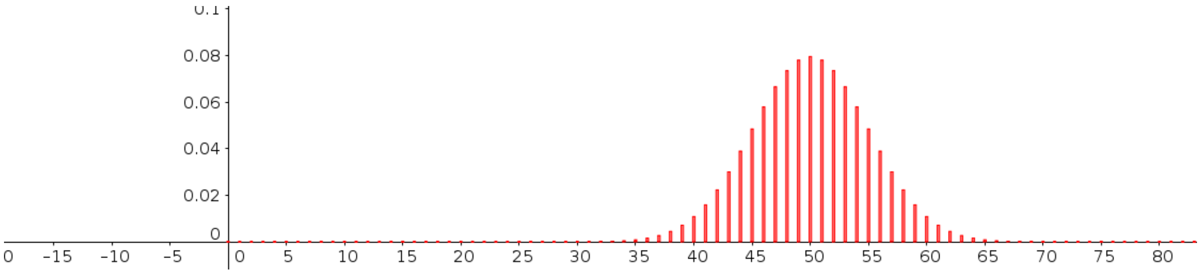
Soit un entier $n > 0$ et un réel $p \in]0;1[$.

☞ **Étape 1** *On part d'une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale*

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.

- L'espérance de X_n est $\mathbb{E}(X_n) = np$;
- L'écart-type de X_n est $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$;
- Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$;

La distribution de probabilités de X_n est un diagramme en bâtons centré en $\mathbb{E}(X_n) = 0$, par exemple pour $n = 100$ et $p = 0,5$:



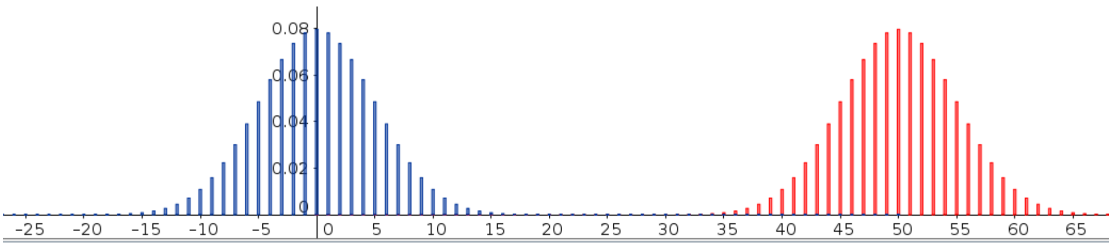
☞ **Étape 2** *On centre*

On considère la variable aléatoire centrée $C_n = X_n - \mathbb{E}(X_n) = X_n - np$.

C_n ne suit plus une loi binomiale (puisqu'elle peut prendre des valeurs négatives).

- L'espérance de C_n est nulle : $\mathbb{E}(X_n - np) = \mathbb{E}(X_n) - np = 0$;
- L'écart-type de C_n est le même que celui de X_n : $\sigma(X_n - np) = \sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$;
- Pour tout $u \in [\![0-np;n-np]\!]$ on a $\mathbb{P}(C_n = u) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k = u + np$;

La distribution de probabilités de $C_n = X_n - np$ est un diagramme en bâtons centré en $\mathbb{E}(X_n - np) = 0$ avec un écart de 1 entre chaque bâton, par exemple pour $n = 100$ et $p = 0,5$ c'est le diagramme bleu :



☞ **Étape 3** *On réduit*

On considère la variable aléatoire centrée $R_n = \dfrac{C_n}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

R_n ne suit pas non plus une loi binomiale (puisqu'elle peut prendre des valeurs négatives).

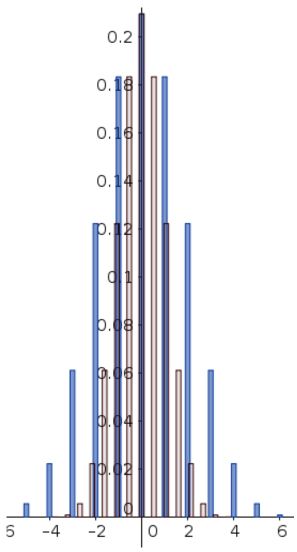
– L'espérance de R_n reste nulle : $\mathbb{E}(R_n) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\mathbb{E}\left(X_n - np\right) = 0$;

– L'écart-type de R_n est égal à 1 : $\sigma(R_n) = \sigma\left(\dfrac{C_n}{\sigma(X_n)}\right) = \dfrac{1}{\sigma(X_n)}\sigma(X_n) = 1$;

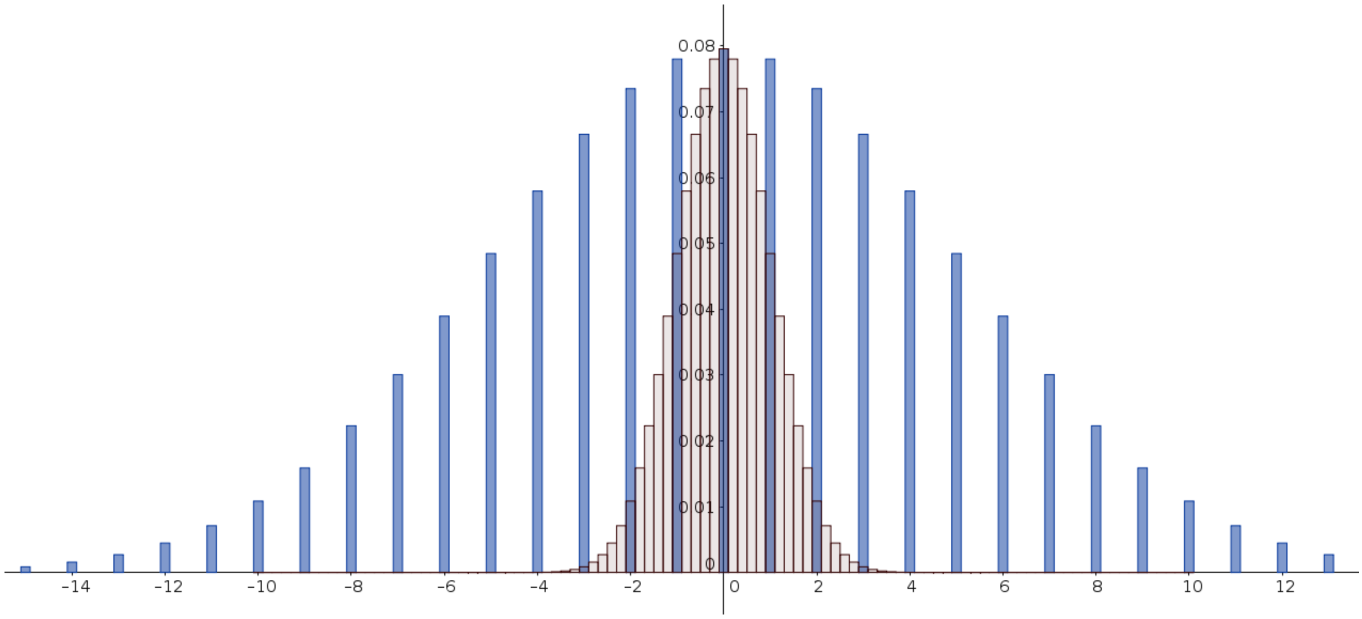
– Les valeurs prises par R_n ne sont plus forcément des entiers mais forment une subdivision régulière de l'intervalle $\left[\dfrac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}} ; \dfrac{n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$ dont le pas est $\dfrac{1}{\sigma(X_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$.

  Ce sont donc les réels v de la forme $v = \dfrac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}} + j\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ avec $j \in [\![0; n]\!]$ et on a $\mathbb{P}\left(R_n = v\right) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ avec $k = v\sqrt{np(1-p)} + np = v\sigma(X_n) + \mathbb{E}(X_n)$.

La distribution de probabilités de la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est un diagramme en bâtons centré en $\mathbb{E}\left(X_n - np\right) = 0$ avec un écart de $\dfrac{1}{\sigma(X_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ entre chaque bâton, par exemple pour $n = 14$ et $p = 0,5$ c'est le diagramme marron :



Et voici le diagramme en bâtons de la centrée réduite pour $n = 100$ et $p = 0,5$:



☞ **Étape 4** *On passe du diagramme en bâtons à l'histogramme*

On remplace le diagramme en bâtons de la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par un histogramme, c'est-à-dire qu'on remplace chaque bâton centrée en une valeur $v =$ prise par R_n par un rectangle de base $\dfrac{1}{\sigma(X_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ qui est aussi l'écart entre deux bâtons.

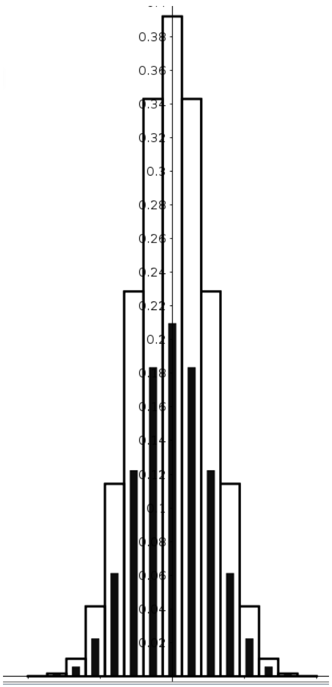
L'aire du rectangle doit représenter la même probabilité que la hauteur du bâton correspondant, on a donc :

$$\text{Hauteur}_{\text{Rectangle}} = \frac{\text{Hauteur}_{\text{Bâton}}}{\text{Base}_{\text{Rectangle}}} = \frac{\mathbb{P}\left(R_n = v\right)}{\frac{1}{\sigma(X_n)}} = \sigma(X_n) \times \mathbb{P}\left(R_n = v\right) = \sqrt{np(1-p)} \times \mathbb{P}\left(R_n = v\right)$$

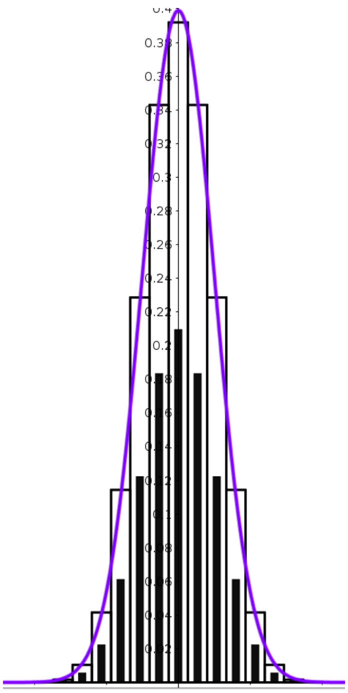
Par exemple pour $n = 100$ et $p = 0,5$, on a $\sigma(X_n) = 5$ et donc chaque bâton du diagramme en bâtons de la centrée réduite est remplacé par un rectangle de base $\dfrac{1}{5} = 0,2$ et de hauteur 5 fois celle du bâton (qui est une valeur de $\mathbb{P}\left(R_n\right) = v$).

Dans un diagramme en bâtons, la hauteur d'un bâton est une probabilité, alors que dans un histogramme, la hauteur d'un rectangle est une densité de probabilité. La probabilité (ou hauteur du bâton) se retrouve dans l'aire du rectangle.

On donne ci-après le diagramme en bâtons (en noir) et l'histogramme (rectangles vides) pour la centrée réduite lorsque $n = 14$ et $p = 0,5$:



Superposons la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et on observe déjà que l'histogramme s'ajuste partiellement avec le domaine sous la courbe (notons que l'histogramme est borné en abscisses mais pas la courbe) :



☞ **Étape 5** *On fait tendre n vers $+\infty$*

Lorsque n tend vers $+\infty$ les valeurs prises par la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ varient dans l'intervalle $\left[\dfrac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}}\,;\,\dfrac{n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$ qui tend vers $]-\infty\,;+\infty[$, avec un pas de $\dfrac{1}{\sigma(X_n)} = \dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ qui tend vers 0.

Autrement dit, les rectangles sont de plus en plus fins avec une base qui tend vers 0 et l'histogramme tend à couvrir l'intervalle $]-\infty\,; +\infty[$ en abscisses.

Par ailleurs, on observe, sans le démontrer, que l'histogramme de la centrée réduite $R_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ *tend à se confondre avec le domaine sous la courbe en cloche d'équation* $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Les hauteurs des rectangles étant des densités de probabilité comme on l'a justifié à l'étape précédente, on peut conjecturer qu'une variable aléatoire de loi discrète binomiale $\mathcal{B}(n\,; p)$ *converge en loi vers une loi à densité de fonction de densité* $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$*, qu'on appelle loi normale centrée réduite notée* $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Cette conjecture est prouvée par le théorème approché par Abraham Moivre puis démontré par Pierre-Simon de Laplace au début du dix-neuvième siècle.

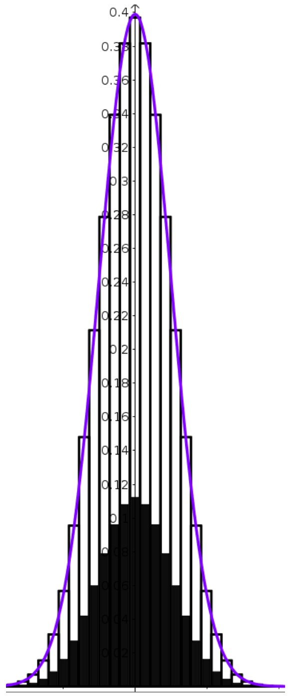
Théorème 1 *Moivre-Laplace*

Soit $p \in]0\,; 1[$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,; p)$.
Soit $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée et réduite associée à X_n.
Pour tous réels a et b on a :

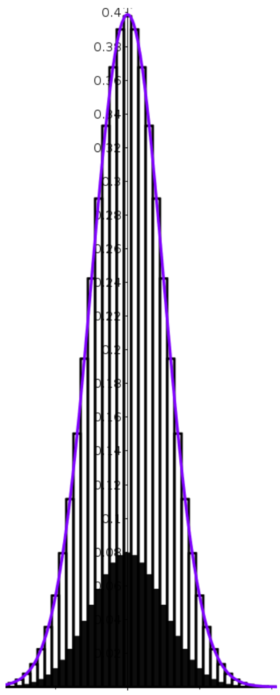
$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Voici quelques superpositions d'histogramme de la centrée réduite (avec aussi le diagramme en bâtons en noir) et de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$:

- pour $n = 50$ et $p = 0,5$



- pour $n = 100$ et $p = 0,5$



– pour $n = 200$ et $p = 0,5$