# Module et argument d'un nombre complexe

## Terminale S

Frédéric Junier[1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

# Le theorème

## Theorem

*Module et argument d'un nombre complexe non nul z nous donnent sa forme trigonométrique :*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad avec\ r = \left| z \right| \quad et \quad \theta = arg(z)\,[2\pi] \quad (1)$$

*Réciproquement, à partir de l'écriture algébrique $z = a + ib$, on a*

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ et \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}.$$

# Le corollaire qu'on utilise en pratique

**Theorem**

*Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$.*

$$z = r\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \quad \text{avec } r > 0$$

*équivaut à*

$$r = \left|z\right| \text{ et } \alpha = arg\left(z\right)\left[2\pi\right]$$

Pour déterminer le module $\left| z \right|$ et un argument $\arg(z)$ d'un complexe $za + \mathrm{i}b$ avec $z \neq 0$ :

- on commence par calculer le module $r = \left| z \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $r > 0$ ;
- on écrit $z = r \times \frac{z}{r}$ où $\left| \frac{z}{r} \right| = 1$ ;
- on détermine $\alpha$ tel que $\frac{z}{r} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, en général un angle associé à 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ ;
- on applique le corollaire page 3 précédent.

# Une application directe du corollaire

Soit le nombre complexe $z = 5\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- On remarque que $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
- En appliquant le corollaire page 3, il vient directement $\left| z \right| = 5$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

# Un piège

Soit le nombre complexe $z = -5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$.

- On serait tenté de procéder comme précédemment mais attention $-5 < 0$ et donc $-5$ n'est pas le module de $z$
- On peut remarquer qu'en écrivant $z = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{-1}{2}\right)$, on a $z = 5\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$
- En appliquant le corollaire page 3, il vient alors $\left|\, z \,\right| = 5$ et $\arg(z) = \frac{-5\pi}{6}\,[2\pi]$.

# Un exemple générique (1 / 2)

Soit le nombre complexe $z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{12}$.

- Avant d'appliquer le corollaire page 2, transformons l'expression ;
- On calcule d'abord le module de $z$ :

$$\left| z \right| = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$$

- On factorise par $\left| z \right|$ dans l'écriture algébrique de $z$ :

$$z = \left| z \right| \times \frac{z}{\left| z \right|} = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{12}}{4}\right)$$

$$z = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

# Un exemple générique (2 / 2)

Soit le nombre complexe
$z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{12} = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{12}}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- On détermine $\alpha$ tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- On applique le le corollaire page 3 :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

- On en déduit que $\left| z \right| = 4$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.