Module et argument d'un nombre complexe

Terminale S

Frédéric Junier [1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Le theorème

Theorem

Module et argument d'un nombre complexe non nul z nous donnent sa forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad avec\ r = |\,z\,| \quad et \quad \theta = arg(z)\,[2\pi] \quad (1)$$

Réciproquement, à partir de l'écriture algébrique $z = a + ib$*, on a*

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ et \left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{array}\right. .$$

Le corollaire qu'on utilise en pratique

Theorem

Soit $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z \neq 0$.

$$z = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \textit{avec } r > 0$$

équivaut à

$$r = \left|\,z\,\right| \textit{ et } \alpha = arg\,(z)\,[2\pi]$$

Pour déterminer le module $\left| z \right|$ et un argument $\arg(z)$ d'un complexe $za + \mathrm{i}b$ avec $z \neq 0$:

- on commence par calculer le module $r = \left| z \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $r > 0$;
- on écrit $z = r \times \frac{z}{r}$ où $\left| \frac{z}{r} \right| = 1$;
- on détermine α tel que $\frac{z}{r} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, en général un angle associé à 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π ;
- on applique le corollaire page 3 précédent.

Une application directe du corollaire

Soit le nombre complexe $z = 5\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- On remarque que $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
- En appliquant le corollaire page 3, il vient directement $\left| z \right| = 5$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Un piège

Soit le nombre complexe $z = -5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$.

- On serait tenté de procéder comme précédemment mais attention $-5 < 0$ et donc -5 n'est pas le module de z
- On peut remarquer qu'en écrivant $z = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1}{2}\right)$, on a $z = 5\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$
- En appliquant le corollaire page 3, il vient alors $\left|\,z\,\right| = 5$ et $\arg(z) = \frac{-5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Un exemple générique (1 / 2)

Soit le nombre complexe $z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{12}$.

- Avant d'appliquer le corollaire page 2, transformons l'expression ;
- On calcule d'abord le module de z :

$$\left| z \right| = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$$

- On factorise par $\left| z \right|$ dans l'écriture algébrique de z :

$$z = \left| z \right| \times \frac{z}{\left| z \right|} = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{12}}{4}\right)$$

$$z = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Un exemple générique (2 / 2)

Soit le nombre complexe
$z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{12} = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{12}}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- On détermine α tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- On applique le le corollaire page 3 :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

- On en déduit que $\left| z \right| = 4$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.