# Fiche_Exponentielle_ExosSupp_2016

November 24, 2016

```
In [216]: import numpy as np                  #pour disposer des tableaux de type arr
          import matplotlib.pyplot as plt     #pour les graphiques

In [217]: % matplotlib inline

In [218]: from sympy import *

In [219]: init_session()
```

```
IPython console for SymPy 1.0 (Python 3.5.2-32-bit) (ground types: python)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at http://docs.sympy.org/1.0/
```

```
In [220]: def deriver(fx):
              return diff(fx, x)

          def simplifier(exp):
              return simplify(exp)

          def factoriser(exp):
              return factor(exp)

          def graphique(f, fprim, xmin, xmax, ymin, ymax, legpos = 'lower right'):
              #tracé des  courbes  de f et f'
              plt.axis([xmin, xmax, ymin, ymax])
              tx = np.linspace(xmin, xmax, 1001)
              ty = f(tx)
              tz = fprim(tx)
              plt.axhline(color='blue')
```

```
plt.axvline(color='blue')
plt.grid(True)
plt.plot(tx, ty, linestyle='-', linewidth=2, color='red', label=r'$y=
plt.plot(tx, tz, linestyle='-', linewidth=1, color='green', label=r"$
plt.legend(loc = legpos)
```

## 0.1 Exercice 4

### 0.1.1 Exemple 1

$f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}+x}$
$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$

```
In [221]: fx = exp(- x**2 / 8 + x)
          fx
```

Out[221]:

$$e^{-\frac{x^2}{8}+x}$$

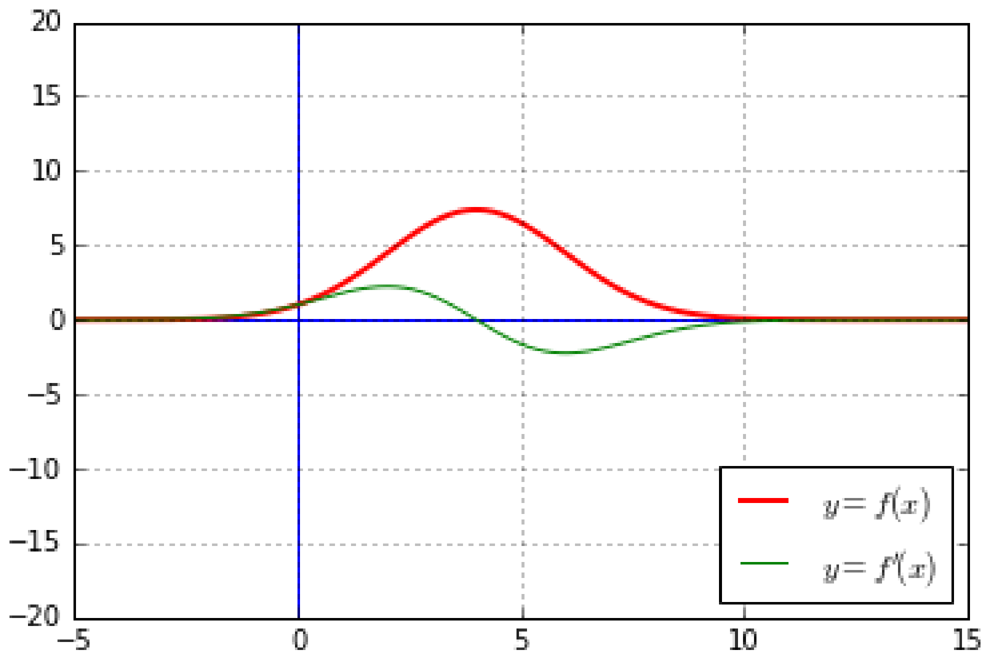
```
In [222]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

Out[222]:

$$\left(-\frac{x}{4}+1\right)e^{-\frac{x^2}{8}+x}$$

```
In [223]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")
```

```
In [224]: graphique(f, fprim, -5, 15, -20, 20)
```



```
In [225]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[225]:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\frac{x^2}{8}+x} = 0$$

```
In [226]: Eq(Limit(fx, x, -oo), limit(fx, x, -oo))
```

Out[226]:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{x^2}{8}+x} = 0$$

### 0.1.2 Exemple 2

$f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f : x \mapsto 30\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}$
$f$ dérivable sur $]0; +\infty[$

```
In [227]: fx = 30 * exp(sqrt(x)) + exp(1)
          fx
```

Out[227]:

$$30e^{\sqrt{x}} + e$$

```
In [228]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

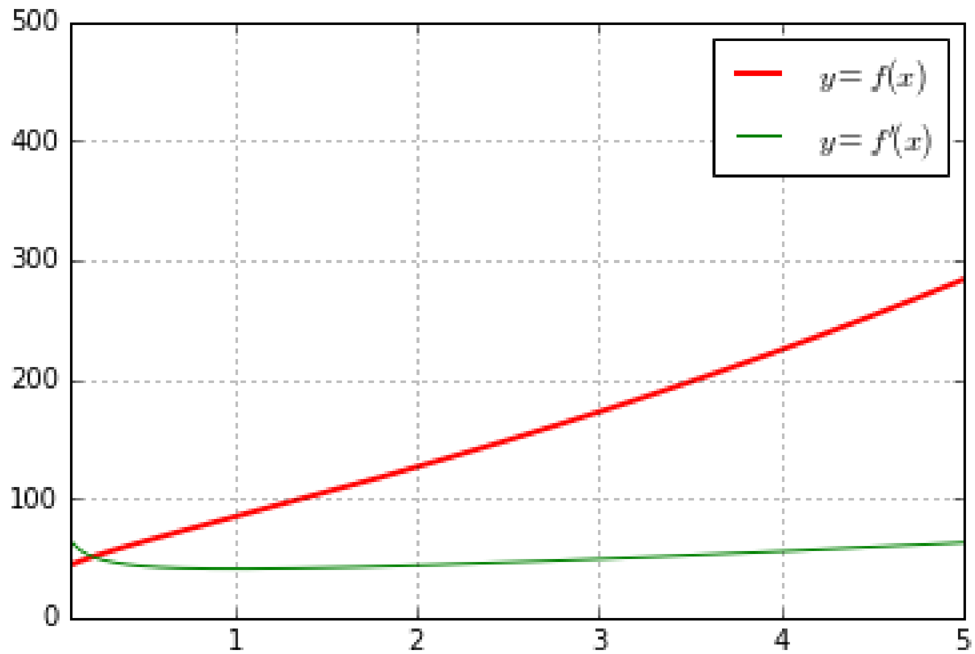
Out[228]:

$$\frac{15e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

```
In [229]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")

In [230]: % matplotlib inline

In [231]: graphique(f, fprim, 0.1, 5, 0, 500, legpos = 'upper right')
```




```
In [232]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[232]:

$$\lim_{x\to\infty}\left(30e^{\sqrt{x}} + e\right) = \infty$$

### 0.1.3 Troisième exemple

$f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{90}{3+\mathrm{e}^{-2x}}$
$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$

```
In [233]: fx = 90 / (3 + exp(-2*x))
          fx
```

Out[233]:

$$\frac{90}{3 + e^{-2x}}$$

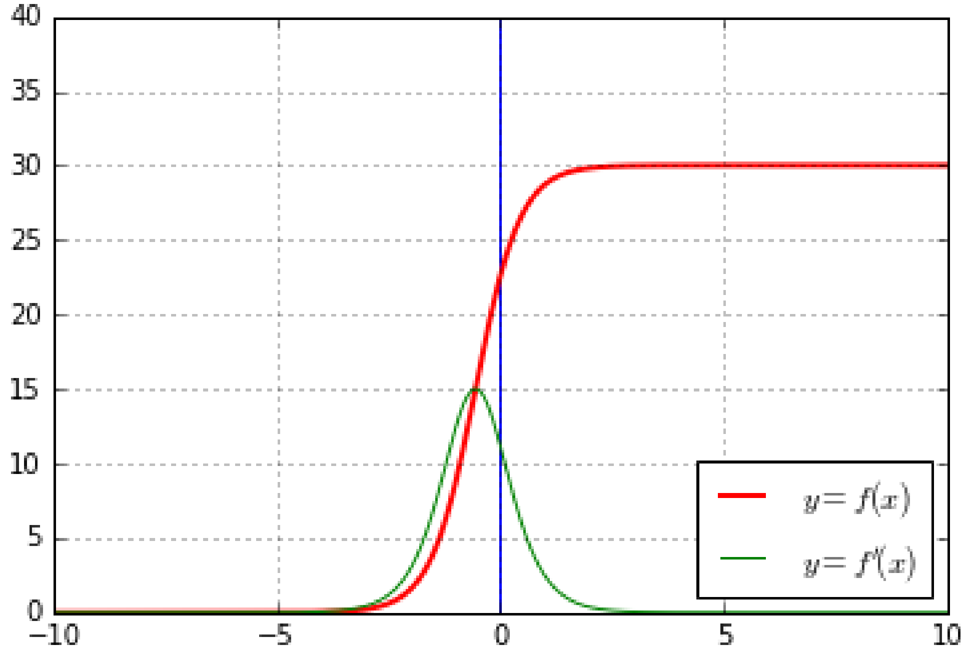
```
In [234]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

Out[234]:

$$\frac{180e^{-2x}}{\left(3 + e^{-2x}\right)^{2}}$$

```
In [235]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")
```

```
In [236]: graphique(f, fprim, -10, 10, 0, 40, legpos = 'lower right')
```




```
In [237]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[237]:

$$\lim_{x \to \infty} \left( \frac{90}{3 + e^{-2x}} \right) = 30$$

```
In [238]: Eq(Limit(fx, x, -oo), limit(fx, x, -oo))
```

Out[238]:

$$\lim_{x \to -\infty} \left( \frac{90}{3 + e^{-2x}} \right) = 0$$

### 0.1.4 Quatrième exemple

$f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (2,5 + x)\mathrm{e}^{-0,5x+1}$
$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$

```
In [239]: fx = (2.5 + x)*exp( -0.5*x + 1)
          fx
```

Out[239]:

$$(x + 2.5)\, e^{-0.5x+1}$$

```
In [240]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

Out[240]:

$$-0.5\,(x + 2.5)\, e^{-0.5x+1} + e^{-0.5x+1}$$

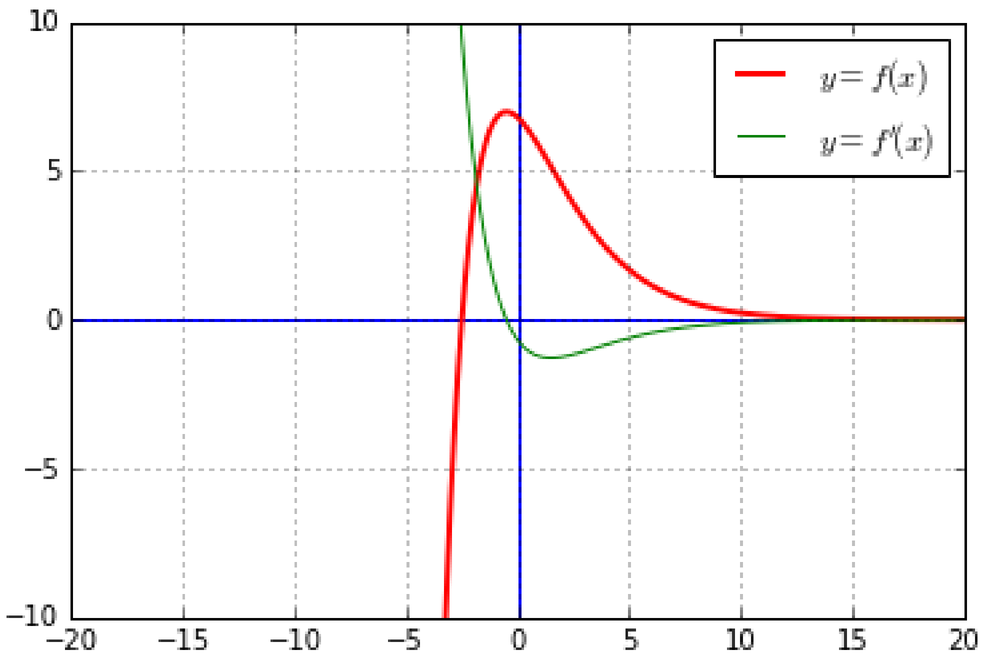
```
In [241]: factoriser(fprimx)
```

Out[241]:

$$-1.0e\,(0.5x + 0.25)\, e^{-0.5x}$$

```
In [242]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")
```

```
In [243]: graphique(f, fprim, -20, 20, -10, 10, legpos = 'upper right')
```




```
In [244]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[244]:

$$\lim_{x \to \infty} \left((x + 2.5)\, e^{-0.5x+1}\right) = 0$$

```
In [245]: Eq(Limit(fx, x, -oo), limit(fx, x, -oo))
```

Out[245]:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\left(x + 2.5\right) e^{- 0.5 x + 1}\right) = -\infty$$

### 0.1.5 Cinquième exemple

$f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$
$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$

```
In [246]: fx = (exp(2*x) - 1)/(exp(2*x) + 1)
          fx
```

Out[246]:

$$\frac{e^{2 x} - 1}{e^{2 x} + 1}$$

```
In [247]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

Out[247]:

$$- \frac{2 \left(e^{2 x} - 1\right) e^{2 x}}{\left(e^{2 x} + 1\right)^{2}} + \frac{2 e^{2 x}}{e^{2 x} + 1}$$

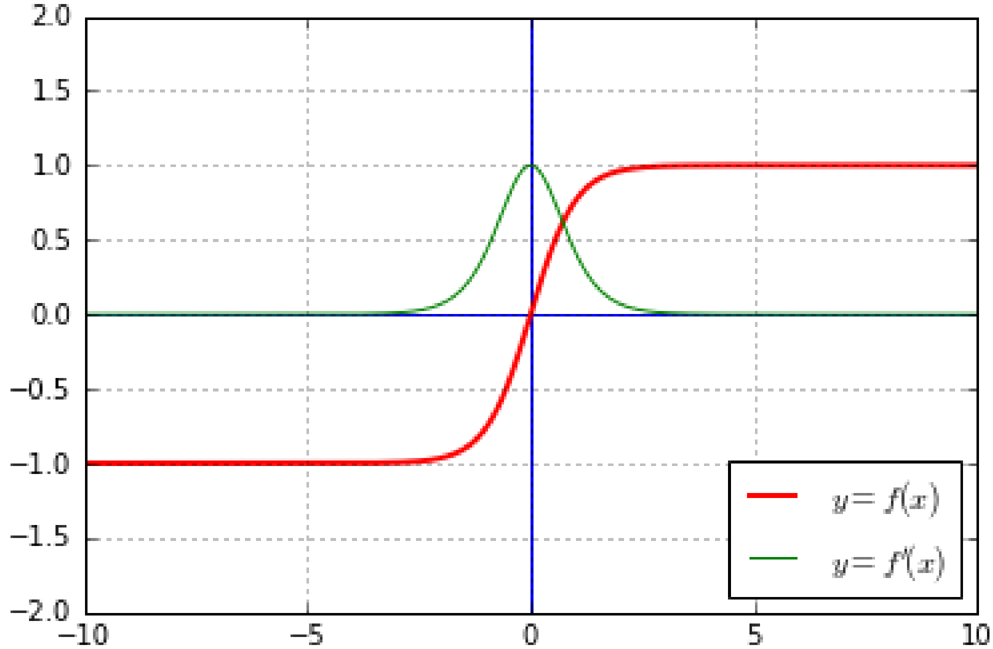
```
In [248]: factoriser(fprimx)
```

Out[248]:

$$\frac{4 e^{2 x}}{\left(e^{2 x} + 1\right)^{2}}$$

```
In [249]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")
```

```
In [250]: graphique(f, fprim, -10, 10, -2, 2, legpos = 'lower right')
```




```
In [251]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[251]:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right) = 1$$

```
In [252]: Eq(Limit(fx, x, -oo), limit(simplifier(fx), x, -oo))
```

Out[252]:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right) = -1$$

### 0.1.6 Sixième exemple

$f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (x-2)\mathrm{e}^{-4x}$
$f$ dérivable sur $\mathbb{R}$

```
In [253]: fx = (x - 2)*exp(-4*x)
          fx
```

Out[253]:

$$(x-2)\, e^{-4x}$$

```
In [254]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

Out[254]:

$$-4(x-2)e^{-4x} + e^{-4x}$$

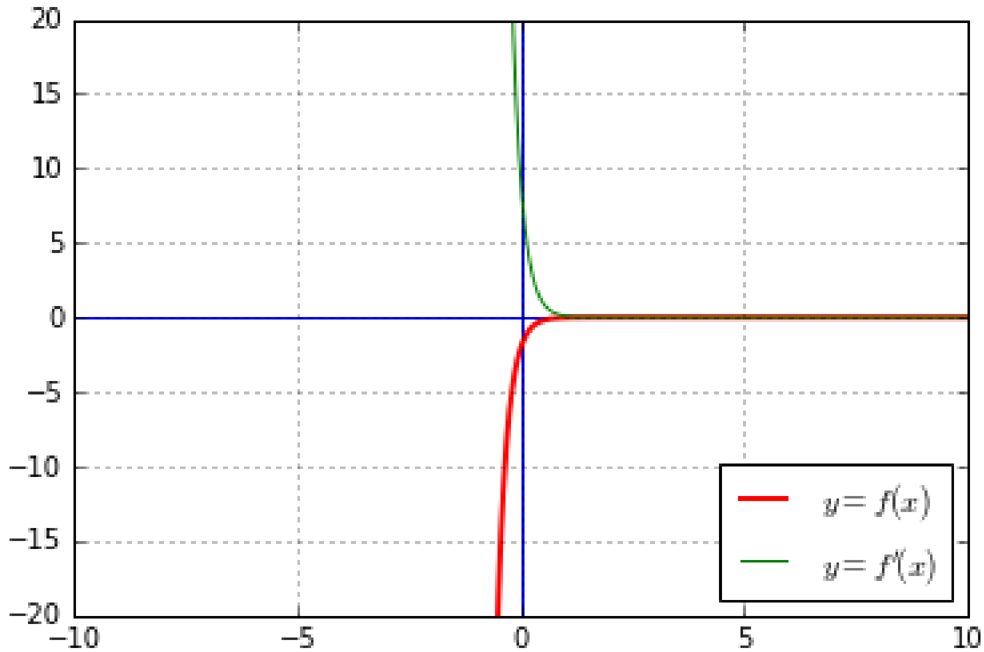
```
In [255]: factoriser(fprimx)
```

Out[255]:

$$-(4x-9)e^{-4x}$$

```
In [256]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")
```

```
In [257]: graphique(f, fprim, -10, 10, -20, 20, legpos = 'lower right')
```




```
In [258]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[258]:

$$\lim_{x\to\infty}\left((x-2)e^{-4x}\right) = 0$$

```
In [259]: Eq(Limit(fx, x, -oo), limit(simplifier(fx), x, -oo))
```

Out[259]:

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x-2)e^{-4x}\right) = -\infty$$

## 0.2 Exercice 7 de la fiche 2 sur la fonction exponentielle

Soient $a$ et $b$ deux réels, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par \$f(x)=ax+1+bx^2 e^{-x} \$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels.

Dans un repère orthogonal du plan, on a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$.

On donne les points $A(0;1)$ et $B(1;3+4\mathrm{e}^{-1})$ et $C(2;5)$.

### 0.2.1 Question 1 Justifier que le point $A$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$

$f(0) = a \times 0 + 1 + b \times 0^2 \times \mathrm{e}^0 = 1$

### 0.2.2 Question 2 Vérifier que pour tout réel $x$ on a \$f'(x)=a+2bxe$^{\{-x\}-bx}$2e^{-x} \$

```
In [260]: a, b = symbols('a b')
```

```
In [261]: fx = a * x  + 1 + b * x**2 * exp(-x)
```

```
In [262]: fx
```

Out[262]:

$$ax + bx^2e^{-x} + 1$$

```
In [263]: fprimx = deriver(fx)
          fprimx
```

Out[263]:

$$a - bx^2e^{-x} + 2bxe^{-x}$$

On admet que le point $B$ appartient à la courbe de $f$ et que la droite $(AC)$ est tangente à la courbe de $f$ au point $A$.

### 0.2.3 Question 3 a) Démontrer que les réels $a$ et $b$ vérifient $f(1) = 3 + 4\mathbf{e}^{-1}$ et $f'(0) = 2$

La courbe de $f$ passe par le point $B(1;3+4\mathrm{e}^{-1})$ donc $f(1) = 3 + 4\mathrm{e}^{-1}$. On a donc :

```
In [264]: print("f(1) =", fx.subs(x, 1) ,"=", " 3 + 4exp(-1)")
```

```
f(1) = a + b*exp(-1) + 1 =  3 + 4exp(-1)
```

```
In [265]: fx.subs(x, 1)
```

Out[265]:

$$a + \frac{b}{e} + 1$$

Par ailleurs la droite $(AC)$ est tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $0$ donc $f'(0) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-1}{2-0} = 2$.

On a donc :

```
In [266]: print("f'(0) =", fprimx.subs(x, 0), " = 2")
```

```
f'(0) = a  = 2
```

On résout donc le système :

$$\begin{cases} a + \frac{b}{e} + 1 = 3 + 4\mathrm{e}^{-1} \\ a = 2 \end{cases}$$

```
In [267]: solve([a + b/exp(1) - 2 - 4*exp(-1),
                 a - 2], [a, b])
```

Out[267]:

$$\{a : 2, \quad b : 4\}$$

```
In [268]: fx = fx.subs( {a : 2, b : 4})
```

```
In [269]: fx
```

Out[269]:

$$4x^2e^{-x} + 2x + 1$$

### 0.2.4 Question 4 La droite $(AB)$ est-elle tangente à la courbe de $f$ au point $B$ ? Justifier.

```
In [270]: fprimx = fprimx.subs( {a : 2, b : 4})
```

Fonction dérivée de $f$

```
In [271]: fprimx
```

Out[271]:

$$-4x^2e^{-x} + 8xe^{-x} + 2$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point $B$ d'abscisse 1 est $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$

Valeur de $f(1)$

```
In [272]: fx.subs(x, 1)
```

Out[272]:

$$\frac{4}{e} + 3$$

Valeur de $f'(1)$

```
In [273]: fprimx.subs(x, 1)
```

Out[273]:

$$\frac{4}{e} + 2$$

Puisque $(AB)$ et la tangente à la courbe de $f$ au point $B$ passent toutes les deux par $B$, elles sont confondues si et seulement si $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Valeur de $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

```
In [274]: (fx.subs(x,1) - fx.subs(x, 0))/(1 - 0)
```

Out[274]:

$$\frac{4}{e} + 2$$

On a bien $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{e} + 2$ donc $(AB)$ est la tangente à la courbe de $f$ au point $B$

## 0.3 Exercice 1 de la première fiche sur l'exponentielle

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

### 0.3.1 Question 1 Soit $g$ la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$

```
In [275]: gx = 1 - x + exp(x)
```

```
In [276]: gx
```

Out[276]:

$$-x + e^x + 1$$

```
In [277]: gprimx = deriver(gx)
```

```
In [278]: gprimx
```

Out[278]:

$$e^x - 1$$

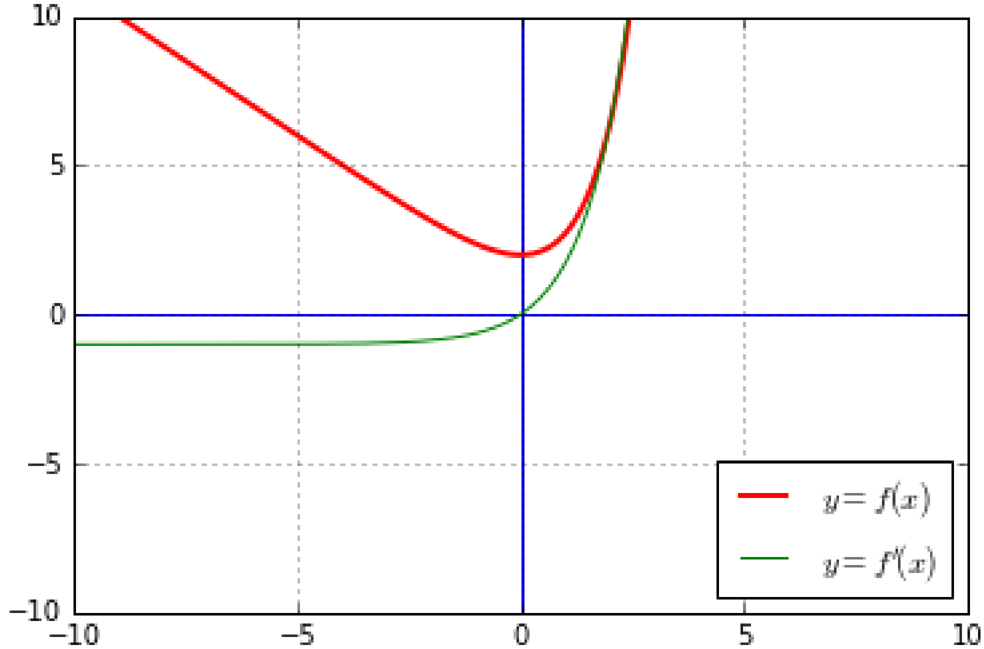
$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

On en déduit que $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$g$ atteint donc son minimum $g(0) = 2$ en $x = 0$ et on peut en déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $g(x) \geqslant g(0) > 0$.

```
In [279]: g = lambdify(x, gx,"numpy")
          gprim = lambdify(x, gprimx,"numpy")
```

```
In [280]: graphique(g, gprim, -10, 10, -10, 10)
```




```
In [281]: Eq(Limit(gx, x, +oo), limit(gx, x, +oo))
```

Out[281]:

$$\lim_{x \to \infty} \left(-x + e^{x} + 1\right) = \infty$$

```
In [282]: Eq(Limit(gx, x, -oo), limit(simplifier(gx), x, -oo))
```

Out[282]:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-x + e^{x} + 1\right) = \infty$$

### 0.3.2 Question 2 Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ puis la limite de $f$ en $+\infty$.

```
In [283]: fx = x + 1 + x/exp(x)
```

```
In [284]: fx
```

Out[284]:

$$x + xe^{-x} + 1$$

```
In [285]: fprimx = deriver(fx)
```

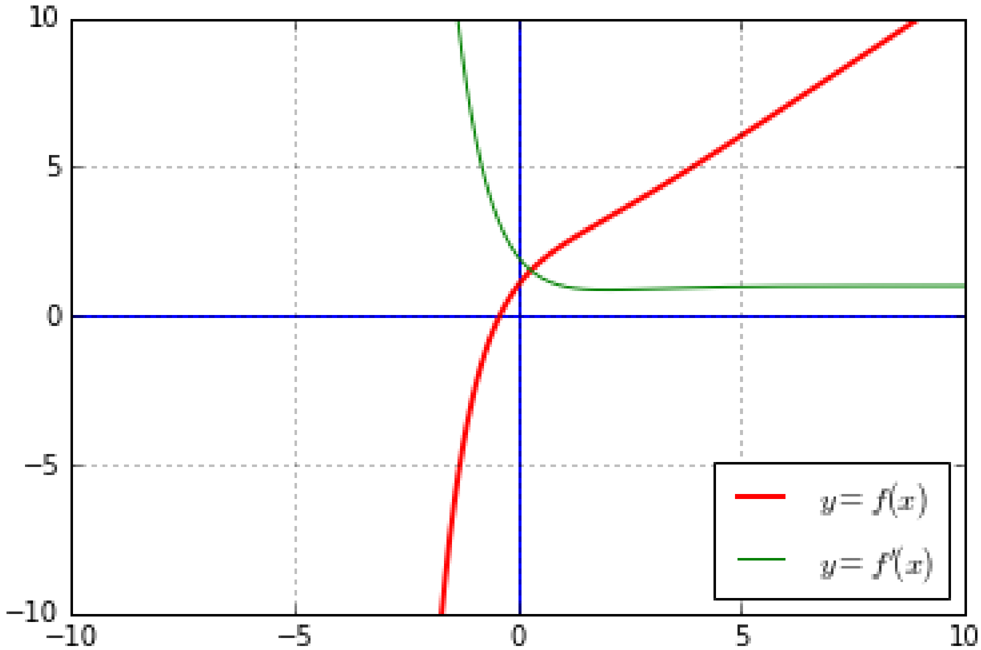
```
In [286]: fprimx
```

Out[286]:

$$-xe^{-x} + 1 + e^{-x}$$

```
In [287]: f = lambdify(x, fx,"numpy")
          fprim = lambdify(x, fprimx,"numpy")
```

```
In [288]: graphique(f, fprim, -10, 10, -10, 10)
```




```
In [289]: Eq(Limit(x*exp(-x), x, oo), limit(x*exp(-x), x, oo))
```

Out[289]:

$$\lim_{x \to \infty} \left(xe^{-x}\right) = 0$$

Donc par somme

```
In [290]: Eq(Limit(fx, x, +oo), limit(fx, x, +oo))
```

Out[290]:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x + xe^{-x} + 1\right) = \infty$$

Limite en $-\infty$

```
In [291]: Eq(Limit(x*exp(-x), x, -oo), limit(x*exp(-x), x, -oo))
```

Out[291]:

$$\lim_{x \to -\infty} \left( xe^{-x} \right) = -\infty$$

Donc par somme

```
In [292]: Eq(Limit(fx, x, -oo), limit(simplifier(fx), x, -oo))
```

Out[292]:

$$\lim_{x \to -\infty} \left( x + xe^{-x} + 1 \right) = -\infty$$

### 0.3.3 Questions 3 et 4: On appelle $f'$ la dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

```
In [293]: fprimx = deriver(fx)
```

```
In [294]: fprimx
```

Out[294]:

$$-xe^{-x} + 1 + e^{-x}$$

```
In [295]: factoriser(fprimx)
```

Out[295]:

$$-\left(x - e^{x} - 1\right) e^{-x}$$

```
In [296]: gx*exp(-x)
```

Out[296]:

$$\left(-x + e^{x} + 1\right) e^{-x}$$

On remarque que pour tout réel $x$ on a $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$.
Or pour tout réel $x$ on \$ e^{-x} > 0\$ et $g(x) > 0$ d'après la question 1.
On en déduit que $f'(x) > 0$ et donc que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

### 0.3.4 Question 5:

- $f$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0 < \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'après un corollaire du TVI l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.
$f(-1) = \frac{-1}{\mathrm{e}^{-1}}$ et $f(0) = 1$. On a $f$ continue sur $[-1; 0]$ et $f(-1) < 0 < f(0)$ donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution au moins dans $[-1; 0]$. De plus on vient de démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $-1 < \alpha < 0$.