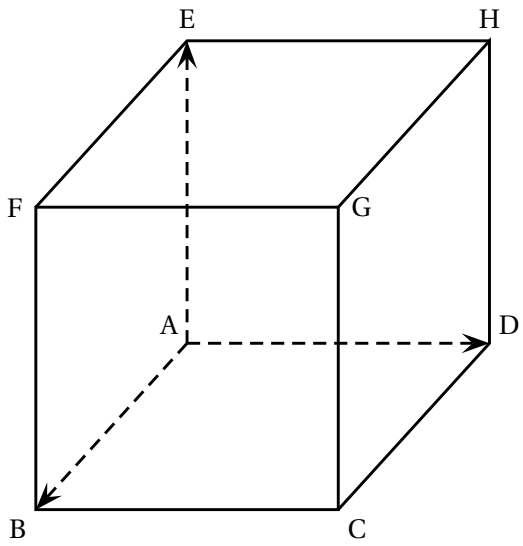
On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous.
L'espace est rapporté au repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. Déterminer les système d'équations des trois axes (AB), (AD) et (AE) du repère.
2. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0$.
   Reproduire la figure ci-dessous et construire la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
   La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



Solution :

☞ Pour tracer la section, il nous faut rechercher au moins trois points du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1$.
Le plus simple est de rechercher les points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec les axes du repère.

— L'axe des abscisses (AB) est l'intersection des plans (AEB) d'équation $y=0$ et (ABD) d'équation $z=0$, il est donc caractérisé par le système d'équations $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$.
Pour déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe (AB), on résout le système :

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Le point B(1 ; 0 ; 0) appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

— L'axe des ordonnées (AD) est l'intersection des plans (ABD) d'équation $z = 0$ et (AED) d'équation $x = 0$, il est donc caractérisé par le système d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Pour déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe (AD), on résout le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{2}z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le point M(0 ; 4 ; 0) appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

— L'axe des cotes (AE) est l'intersection des plans (AEB) d'équation $y = 0$ et (AED) d'équation $x = 0$, il est donc caractérisé par le système d'équations $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Pour déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe (AE), on résout le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{2}z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Le point N(0 ; 0 ; 2) appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

☞ Ensuite on réalise la construction géométrique de la section à partir de ces trois points B, M, N. Parmi ces trois points, un seul, B, appartient à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ puisque M et N n'appartiennent pas à des arêtes du cube.

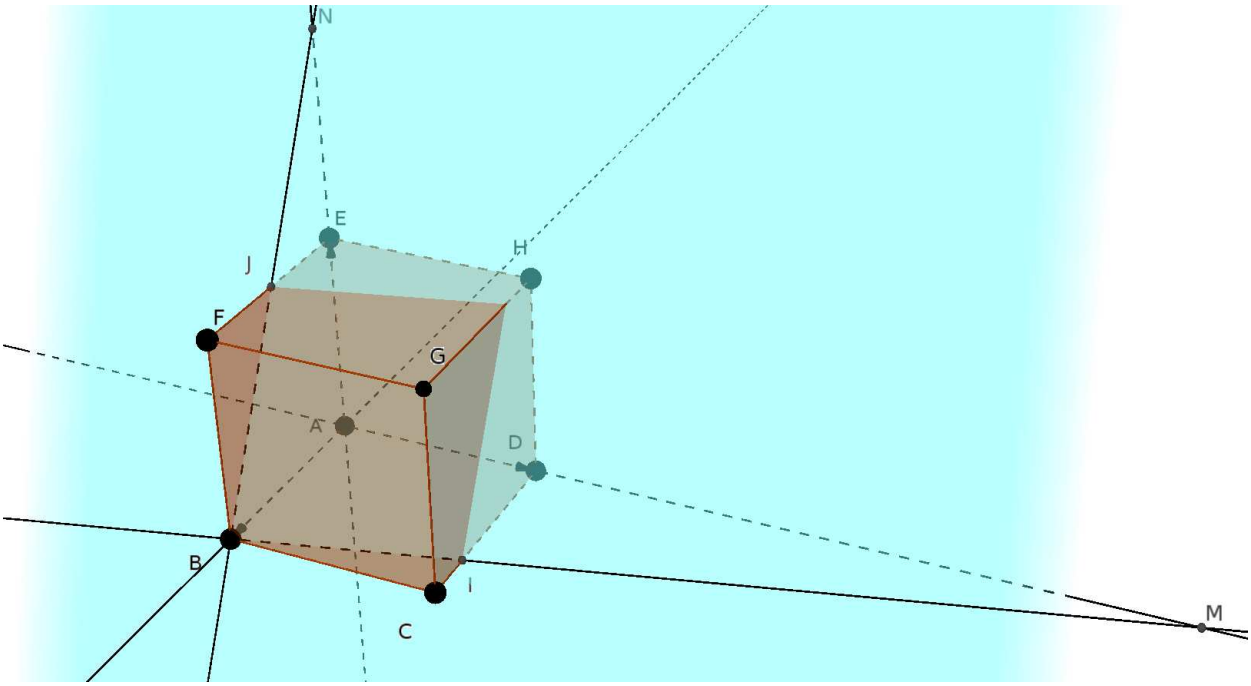
— Dans le plan (AEB), la droite (NB) contenue aussi dans $\mathscr{P}$ coupe l'arête $[EF]$ en J qui appartient donc à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

— Dans le plan (ABD), la droite (MB) contenue aussi dans $\mathscr{P}$ coupe la droite (CD) en I qui appartient donc à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

— Les plans (AEB) et (DHC) sont parallèles donc le plan $\mathscr{P}$ les coupe selon des droites parallèles, on construit ainsi le point K d'intersection de l'arête $[GH]$ et de la parallèle à (BJ) passant par I. Le point K appartient à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

— On dispose désormais de quatre points B, I, K et J appartenant à la section du cube par le plan $\mathscr{P}$. De plus, dans l'ordre B, I, K,J, deux points successifs (le successeur de J étant B) appartiennent à une même face du cube.

— La section du cube par le plan $\mathscr{P}$ est donc le quadrilatère $BIKJ$ qui est un parallélogramme puisque les côtés opposés $[BJ]$ et $[IK]$ tout comme $[BI]$ et $[JK]$ appartiennent à des plans parallèles.


N
E
H
J
F
G
A
D
B
I
C
M