Exercice 2 de la fiche Logarithme

Terminale S

Frédéric Junier[1]

Lycée du Parc, Lyon

1. http://frederic-junier.org/

Plan

Question 1

Question 2

Question 3

Question 1

g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.

- **Affirmation 1** *Sur* $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, *l'équation* $g(x) = 2x$ *a une unique solution :* $\dfrac{e-1}{2}$.
- **Affirmation 2** *Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction* g *au point d'abscisse* $\dfrac{1}{2}$ *est* $1 + \ln 4$.

Réponse à l'affirmation 1

- Sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ on a :

$$g(x) = 2x \iff g(x) - 2x = 0$$
$$g(x) = 2x \iff 2x\left(\ln(2x+1) - 1\right) = 0$$
$$g(x) = 2x \iff 2x = 0 \text{ ou } \ln(2x+1) = 1$$
$$g(x) = 2x \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

- L'affirmation 1 est donc **FAUSSE** car l'équation $g(x) = x$ n'a pas une seule solution sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Réponse à l'affirmation 2

- Sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, g est dérivable par règles opératoires et pour tout réel $x > -\frac{1}{2}$ on a :

$$g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \frac{2}{2x+1}$$
$$g'(x) = 2\ln(2x+1) + \frac{4x}{2x+1}$$

- On en déduit que $g'(\frac{1}{2}) = 2\ln(2) + 1 = \ln(4) + 1$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est bien $1 + \ln 4$.
- L'affirmation 2 est donc **VRAIE**.

Plan

Question 2

On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel} \ \ n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

- **Affirmation 3** *La suite (u_n) est géométrique.*

Réponse à l'affirmation 3

- Pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \iff \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - \ln \mathrm{e}$$

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \iff \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_n}{\mathrm{e}}\right)$$

On applique l'exponentielle aux deux membres

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \iff u_{n+1} = \frac{u_n}{\mathrm{e}}$$

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \iff u_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \times u_n$$

- On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et que l'affirmation 3 est donc **VRAIE**.

Plan

Question 1

Question 2

Question 3

Question 3

Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ w_n = 1 - \ln(v_n).$$

- **Affirmation 4**
  Si la suite (v_n) *est majorée alors la suite* (w_n) *est majorée.*

Réponse à l'affirmation 4

Soit la suite (v_n) définie pour tout pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = \frac{1}{n+1}$.

- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\frac{1}{n+1} < 1$ donc la suite (v_n) est majorée par 1.
- On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc par composition on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln v_n = -\infty$ et donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} -\ln v_n = +\infty$.
- On en déduit par somme que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \ln v_n = \infty$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$
- De $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$ on déduit que la suite (w_n) n'est pas majorée.
- Ce contre-exemple prouve que l'affirmation 4 est **FAUSSE**.